Les Buissonnets
école dévouée depuis 1928

Support de cours

Mathématiques

Matu 2

Berthod Vincent

Module 10 Trigonométrie (partie 1)

10.1 mesure d'un angle, degrés, radians

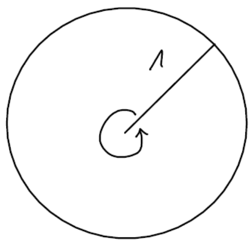
$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi}$, d : angle en degrés, r : angle en radians

10.2 longueur d'un arc de cercle

$l = \alpha r$ avec l : longueur arc de cercle, r : rayon, α : angle en radians interceptés par l'arc

Degré - radians :

le périmètre d'un cercle de rayon 1 est :



$P = \underbrace{2\pi r}_{\text{rayon}} = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$

on décide que l'angle mesurant le tour complet est le périmètre du cercle de rayon 1.

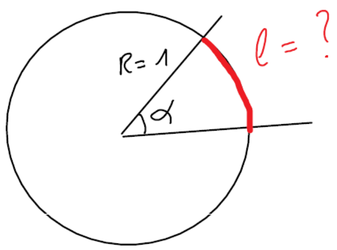
On a :

tour	1	1/2	1/4	1/8				
degrés	$360°$	$180°$	$90°$	$45°$	$30°$	$60°$	$1°$	$d°$
radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180} \cdot d = r$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{180} \cdot d = r \Rightarrow \boxed{\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi}}$$

Longueur d'un arc de cercle :

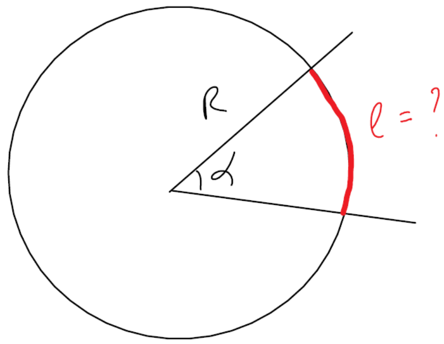
α : angle en radians
la définition du radian implique :
$l = \alpha$



dans un cercle de rayon R on a :

$$\boxed{l = \alpha \cdot R}$$

α en radians



Exercice 1 Convertissez les angles suivants de degrés en radians :

a) 90° b) 45° c) 30°
d) 120° e) 270° f) 60°
g) 310° h) 134° i) 222°

Exercice 2 Convertissez les angles suivants de radians en degrés :

a) $\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{8}$ f) $\frac{7\pi}{9}$
g) 0.5 h) 3.29 i) 4.032

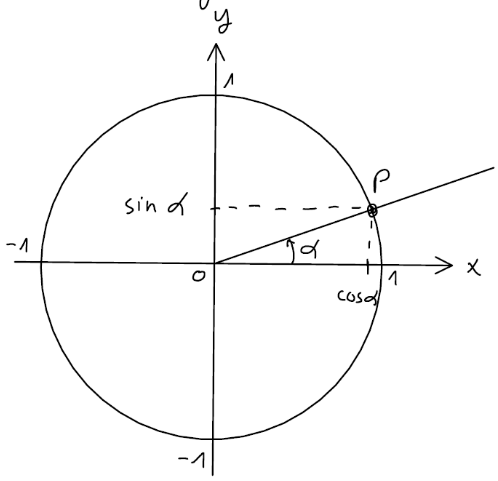
Exercice 3 Calculer le diamètre d'un cercle sur lequel

a) un arc de 1° mesure 2 mm
b) un arc de 0.04° mesure 0.03 mm

10.3 définitions du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente d'un angle, interprétation géométrique et périodicité

Définitions du sinus et du cosinus d'un angle :

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 centré au croisement des axes x et y, c'est-à-dire en (0;0)



Les angles positifs se mesurent dans le sens contraire des aiguilles d'une montre
Les angles négatifs se mesurent dans le sens des aiguilles d'une montre

Le 2ème côté de l'angle coupe le cercle trigonométrique en un point P.

La première coordonnée de P est le cosinus de α, on la note : cos α
La deuxième coordonnée de P est le sinus de α, on la note : sin α

$\Rightarrow P(\cos\alpha ; \sin\alpha)$

Propriétés :

- $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$
- $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$
- si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\alpha \geq 0$, $\sin\alpha \geq 0$ car P est sur le 1er quart du cercle trigonométrique

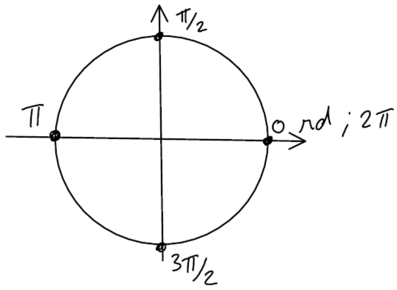
- si $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ alors $\cos\alpha \leq 0$, $\sin\alpha \geq 0$ car P est sur le 2ème quart du cercle trigonométrique

- si $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ alors $\cos\alpha \leq 0$, $\sin\alpha \leq 0$ car P est sur le 3ème quart du cercle trigonométrique

- si $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$ alors $\cos\alpha \geq 0$, $\sin\alpha \leq 0$ car P est sur le 4ème quart du cercle trigonométrique

-

	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
α	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0

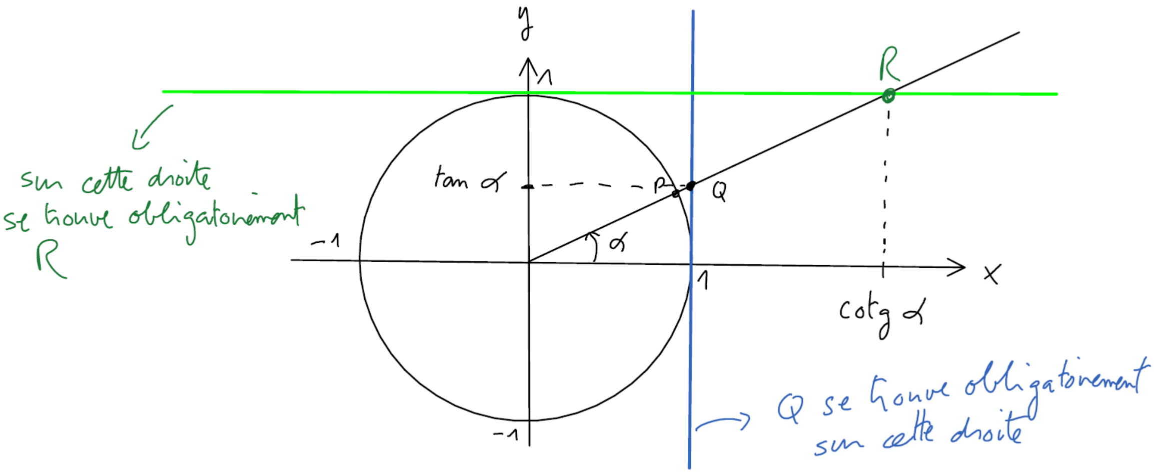


- $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$
  $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$

k
$2\cdot 5\cdot \pi$
$=$
$5\cdot 2\pi$

- $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \quad , k \in \mathbb{Z}$
  $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \quad , k \in \mathbb{Z}$

Définitions de la tangente et de la cotangente d'un angle :



la tangente de α est la 2ème coordonnée du point Q, on la note tan α

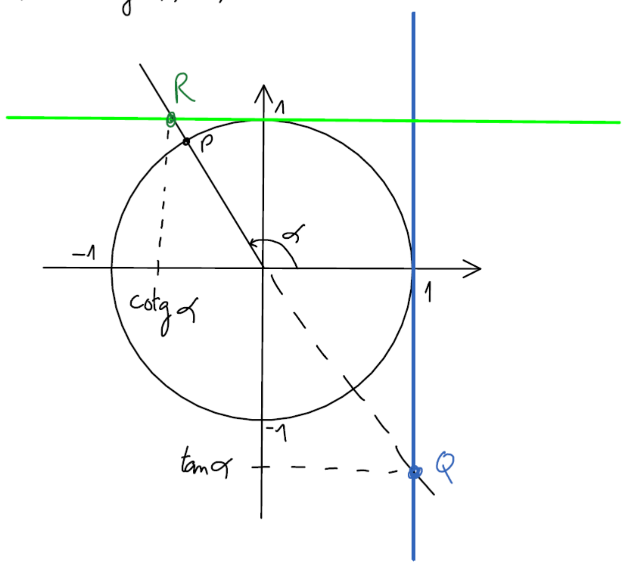
$\Rightarrow Q(1; \tan\alpha)$

la cotangente de α est la 1ère coordonnée du point R, on la note cotg α

$\Rightarrow R(\text{cotg}\,\alpha; 1)$

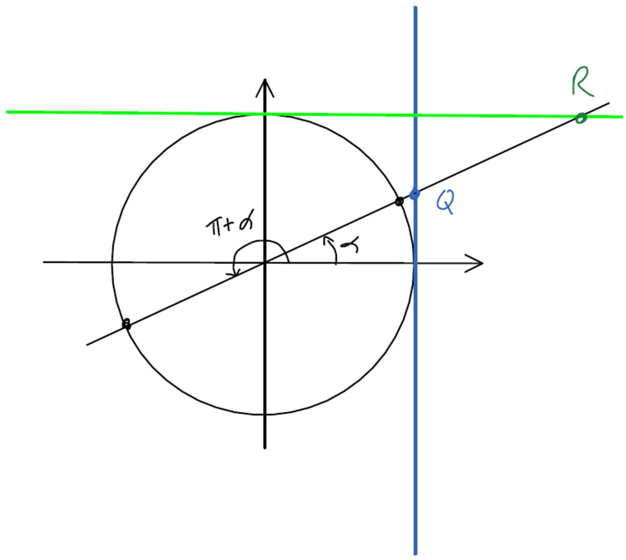
$\text{cotg}\,\alpha \cong -0{,}7$

$\tan\alpha \cong -1{,}2$



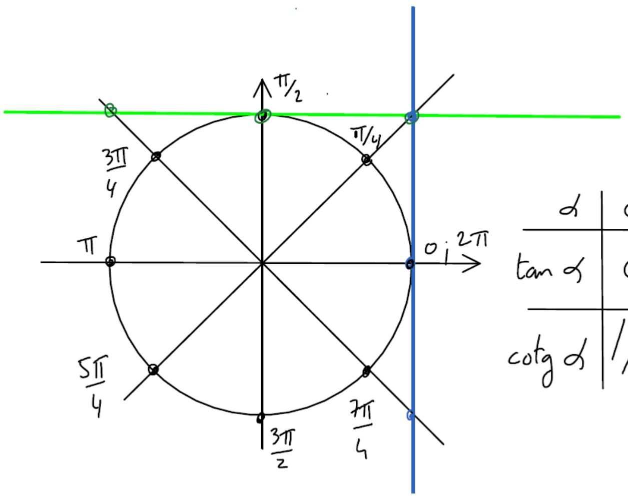
propriétés :

- $-\infty < \tan\alpha < +\infty$
- $-\infty < \text{cotg}\,\alpha < +\infty$



- $\tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$
  $\cot g(\alpha+\pi) = \cot g\,\alpha$
- $\tan(\alpha+k\pi) = \tan\alpha$
  $\cot g(\alpha+k\pi) = \cot g\,\alpha$

  $k \in \mathbb{Z}$



α	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\tan\alpha$	0	1	///	−1	0	1	///	−1	0
$\cot g\,\alpha$	///	1	0	−1	///	1	0	−1	///

Exercice 4

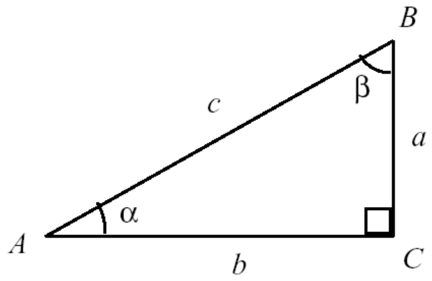
Représenter sur le cercle trigonométrique le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente des angles α=130°, β=220° (ou β=-140°) et χ=310° (ou χ=-50°). Dans chaque cas évaluez à l'œil les valeurs de ces quatre mesures et contrôlez-les sur la calculatrice.

Exercice 5 Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants aux réels suivants :

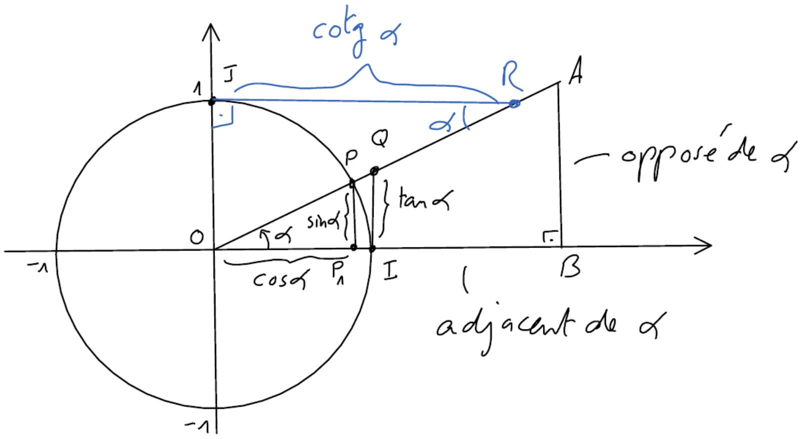
$$\frac{-2\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{17\pi}{2},\ \frac{19\pi}{6},\ \frac{-39\pi}{4}$$
$$\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{-\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\{0,\dots,9\}$$

Module 11 Trigonométrie (partie 2)

11.1 trigonométrie dans un triangle rectangle



$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$	« = côté opposé sur hypoténuse »
$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$	« = côté adjacent sur hypoténuse »
$\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$	« = côté opposé sur côté adjacent »



Les $\Delta\, OPP_1$, $\Delta\, OQI$ et $\Delta\, OAB$ sont semblables
car α est commun
et ils possèdent tous un angle droit

Thalès : • $\dfrac{PP_1}{OP} = \dfrac{AB}{OA}$

$\Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{1} = \dfrac{\text{côté opposé de } \alpha}{\text{hypothénuse du } \Delta OAB}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\text{opposé de } \alpha}{\text{hypothénuse}}$ (sin op hyp)

- $\dfrac{OP_1}{OP} = \dfrac{OB}{OA}$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\text{côté adjacent de } \alpha}{\text{hypothénuse du } \Delta OAB}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\text{adjacent de } \alpha}{\text{hypothénuse}} \qquad (\cos \text{ adj hyp})$$

- $\dfrac{QI}{OI} = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{PP_1}{OP_1}$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha}{1} = \frac{\text{opposé de } \alpha}{\text{adjacent de } \alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\text{opposé de } \alpha}{\text{adjacent de } \alpha} \qquad (\text{tang op adj})$$

Le ΔOJR est semblable au ΔOQI

Thalès : $\dfrac{JR}{OJ} = \dfrac{OI}{QI}$

$$\Rightarrow \frac{\cot g\,\alpha}{1} = \frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow \cot g\,\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \cot g\,\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Exercice 2 Résoudre un triangle consiste à déterminer les éléments non donnés (angles et longueur des côtés. Un triangle ABC est rectangle en C. Résolvez ce triangle connaissant :

a)	$c = 4.75$	et	$\beta = 65.8°$
b)	$c = 25.43$	et	$a = 12.3$
c)	$a = 48.523$	et	$\alpha = 53.46°$
d)	$a = 112.5$	et	$\beta = 14.5°$
e)	$a = 22.3$	et	$b = 46.8$
f)	$b = 42.8$	et	$S = 1040.04$ (S est l'aire du triangle)
g)	$\alpha = 38.45°$	et	$S = 8.28$
h)	$c = 17.3$	et	$S = 53.44$

Exercice 3

Quelle est la hauteur d'un clocher qui a une ombre de 36 mètres lorsque le soleil est élevé de 37.5° au-dessus de l'horizon ?

Exercice 4

Un chat aperçoit un arbre sous un angle de 38.6°. Il recule de 25 mètres et voit alors l'arbre sous un angle de 18.3° (on admettra que les yeux du chat et le pied de l'arbre sont au même niveau).

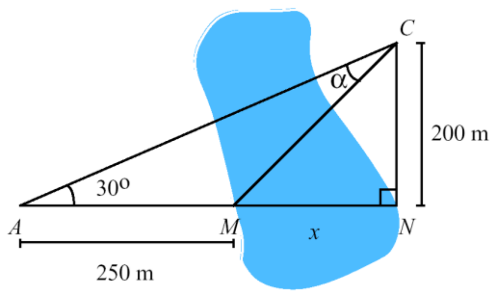
a) A quelle distance de l'arbre le chat se trouvait-il au début ?
b) Quelle est la hauteur de l'arbre ?

Exercice 5

Deux observateurs, placés à la même altitude et distants de 1350 mètres, visent au même moment un point remarquable d'un nuage situé entre eux. Ce point est dans le plan vertical contenant les deux observateurs. Les angles d'élévation sont de 65.4° et 76.5°. Quelle est l'altitude du nuage ?

Exercice 6

Pour déterminer la largeur du Nil entre deux points M et N, les Égyptiens utilisaient un procédé semblable à celui présenté ci-dessous (vue prise d'avion). Calculer x et α.



Exercice 7

Vous venez de plaquer l'ex-amour de votre vie ! Vous l'abandonnez sur la jetée (altitude de ses yeux humides : 4 m) et ramez vers le large (altitude de vos yeux impitoyables : 1 m). À quelle distance du rivage échapperez-vous à son regard déchirant, en disparaissant de son horizon ?

Problèmes tirés d'anciens examens de maturité :

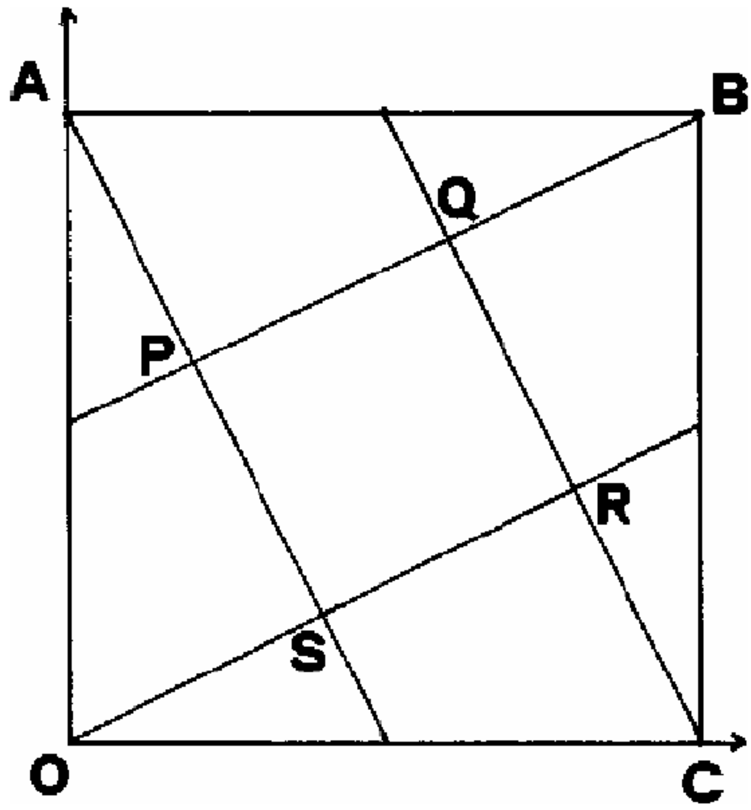
Problème 5, printemps 2007

Soit a un nombre réel strictement positif. Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère le carré OABC, avec A(0,a), B(a,a) et C(a,0) ; on joint chaque sommet au milieu du côté opposé (voir figure).

Soit P, Q, R et S les points d'intersection deux à deux de ces droites.

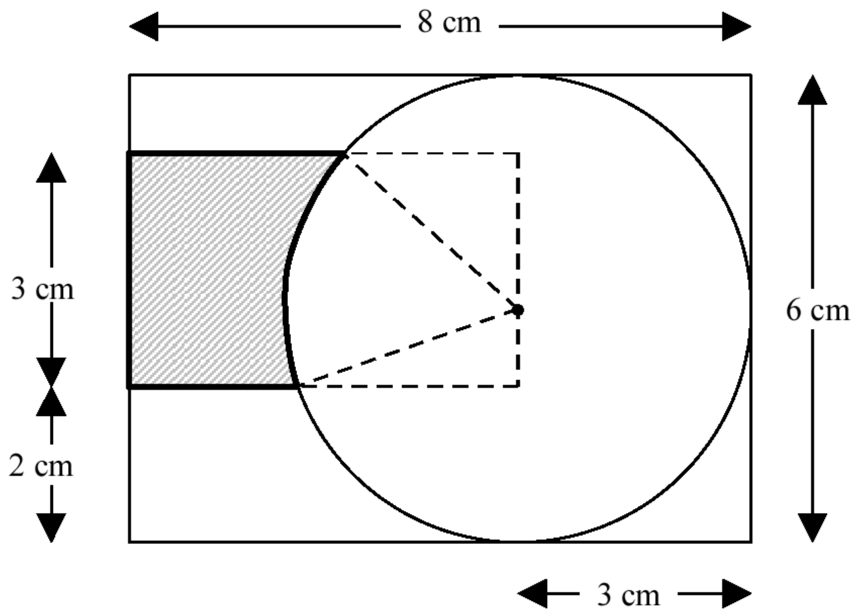
a) Prouver que le quadrilatère PQRS est un carré.

b) Pour quelle valeur de a son aire vaut-elle 5 ?



Problème 4, automne 2006

Calculer le périmètre et l'aire de la surface hachurée.

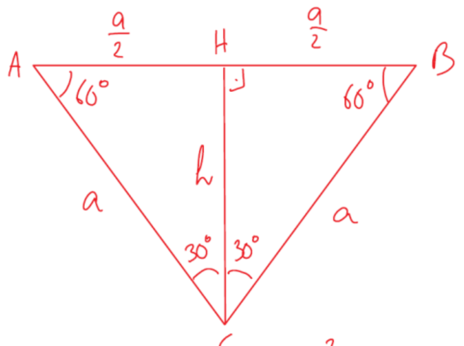


11.2 valeurs exactes des fonctions trigonométriques d'arcs particuliers

α		$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	cotg α
0°	0	1	0	0	
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1	-	

Pour 30° et 60° :

Soit un Δ équilatéral de côtés a

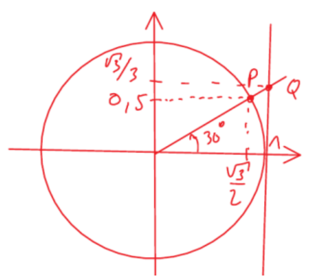


Pythagore : $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

le ΔBHC est un triangle rectangle en H, on a donc :

$$\cos 30° = \frac{h}{a} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{a} = \frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a} = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{a/2}{h} = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{a}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

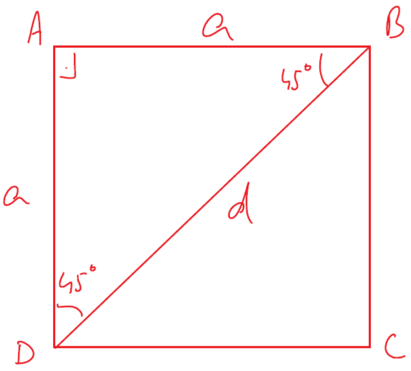
$$\cos 60^\circ = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}\cancel{a}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{a}} = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$$

Pour 45° :

Soit un carré de côté a



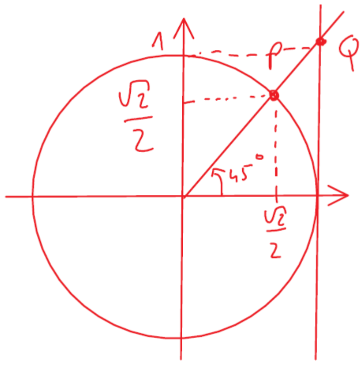
Pythagore : $a^2 + a^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

le Δ ABD est rectangle en A, on a donc :

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$


1
P
Q
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
45°
$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 8 Donner les valeurs exactes de

$$\cos(\frac{3\pi}{4}),\ \sin(\frac{4\pi}{3}),\ \tan(\frac{-\pi}{6}),\ \cos(\frac{19\pi}{6}),\ \sin(\frac{17\pi}{4}),\ \tan(\frac{20\pi}{3})$$

Exercice 9

Calculer $\tan x$ et $\cos x$ en sachant que $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$,

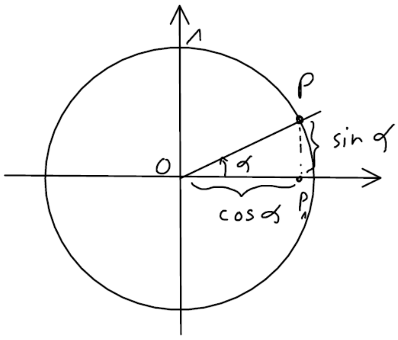
sans machine à calculer !

11.3 relations fondamentales entre les fonctions trigonométriques d'un même arc, d'arcs complémentaires, supplémentaires et opposés

relations entre fonctions trigonométriques d'un même arc :

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$	$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$	$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$	$\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha$

cf. trigonométrique dans le triangle rectangle



le $\Delta\ OPP_1$ est rectangle en P_1

Pythagore : $(OP_1)^2+(PP_1)^2=(OP)^2$

$\Rightarrow (\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=1^2$

$\Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}$

- $1+\tan^2\alpha=1+(\tan\alpha)^2=1+\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

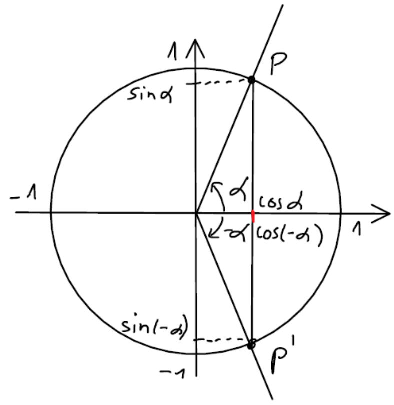
$=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

- $1+\cot^2\alpha=1+\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

relation entre fonctions trigonométriques de certains arcs :

arcs opposés	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
arcs supplémentaires	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$
arcs complémentaires	$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$

<u>arcs opposés</u>



$\cos(-\alpha) =$ 1ère coordonnée de P' = 1ère coordonnée de P $= \cos\alpha$

$\Rightarrow \boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$

$\sin(-\alpha) =$ 2ème coordonnée de P' = l'opposé de la 2ème coordonnée de $P = -\sin\alpha$

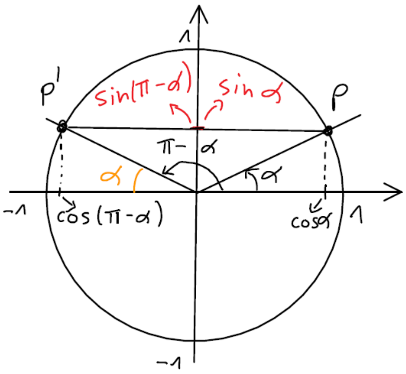
$\Rightarrow \boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha \Rightarrow \boxed{\tan(-\alpha) = -\tan\alpha}$$

<u>arcs supplémentaires</u>: α et $\pi - \alpha$ sont supplémentaires

$20°$ et $160°$ sont supplémentaires

→ la somme de 2 angles supplémentaires est égale à $180° = \pi$ radians



$\cos(\pi - \alpha)$ = 1ère coordonnée de P' = opposé de la 1ère coordonnée de P = $-\cos\alpha$

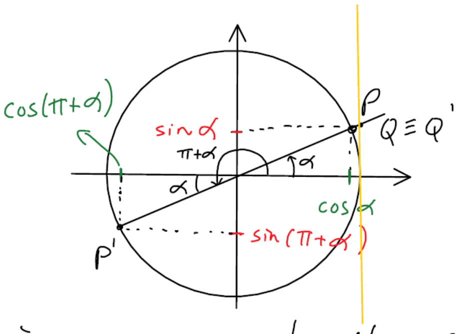
$$\Rightarrow \boxed{\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha}$$

$\sin(\pi - \alpha)$ = 2ème coordonnée de P' = 2ème coordonnée de P = $\sin\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha}$$

$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha}$$



$\cos(\pi + \alpha)$ = la 1ère coordonnée de P' = l'opposé de la 1ère coordonnée de P
$= -\cos\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha}$$

$\sin(\pi + \alpha)$ = la 2ème coordonnée de P' = l'opposé de la 2ème coordonnée de P
$= -\sin\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha}$$

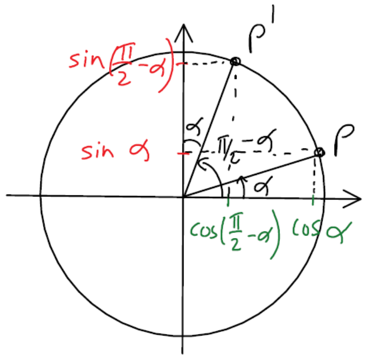
$$\tan(\pi+\alpha) = \frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha}$$

<u>arcs complémentaires:</u> arcs dont la somme vaut $\frac{\pi}{2}$ radians $= 90°$

$20°$ et $70°$ sont complémentaires

α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sont complémentaires



$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) =$ la 1ère coordonnée de P' = la 2ème coordonnée de $P = \sin\alpha$

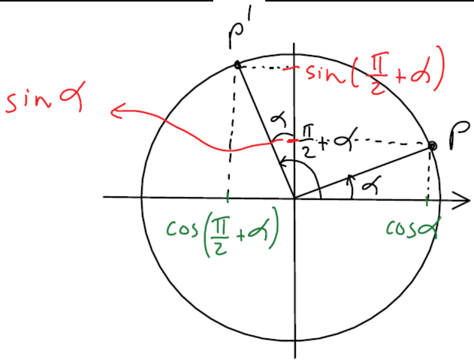
$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha}$$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) =$ la 2ème coordonnée de P' = la 1ère coordonnée de $P = \cos\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha}$$



$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ = la 1ère coordonnée de P' = l'opposé de la 2ème coordonnée de P $= -\sin\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ = la 2ème coordonnée de P' = la 1ère coordonnée de P $= \cos\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha$$

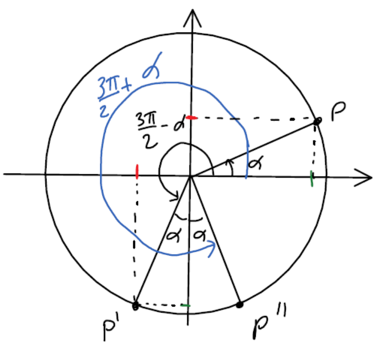
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha$$



Exercice 1 Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ les expressions suivantes :

a) $\sin(-x)+2\sin(\pi-x)$
b) $\cos(-x)+\cos(\pi+x)$
c) $\sin(\frac{5\pi}{2}-x)+\cos(3\pi-x)$
d) $\cos x\cos(\frac{5\pi}{2}+x)+\cos(x-\frac{7\pi}{2})$

Module 12 Trigonométrie (partie 3)

12.1 trigonométrie dans un triangle quelconque

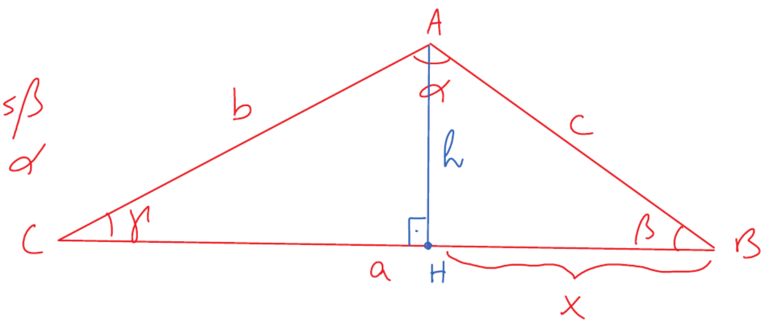
12.1.1 théorème du cosinus

Th. du cosinus :

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Pythagore dans le Δ AHC :

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$b^2 = h^2 + (a - x)^2 \quad (1)$$

Le Δ BHA est rectangle en H :

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c\cdot\cos\beta \quad (2)$$

$$\sin\beta = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c\cdot\sin\beta \quad (3)$$

(2) et (3) dans (1) $\Rightarrow b^2 = (c\cdot\sin\beta)^2 + (a - c\cdot\cos\beta)^2$

$(\sin\beta)^2 = \sin^2\beta$

$$\Rightarrow b^2 = c^2\cdot(\sin\beta)^2 + a^2 - 2ac\cos\beta + c^2\cdot(\cos\beta)^2$$

$$\Rightarrow b^2 = \underline{c^2\cdot\sin^2\beta} + a^2 - 2ac\cos\beta + \underline{c^2\cdot\cos^2\beta}$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2(\underbrace{\sin^2\beta + \cos^2\beta}_{1}) + a^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$

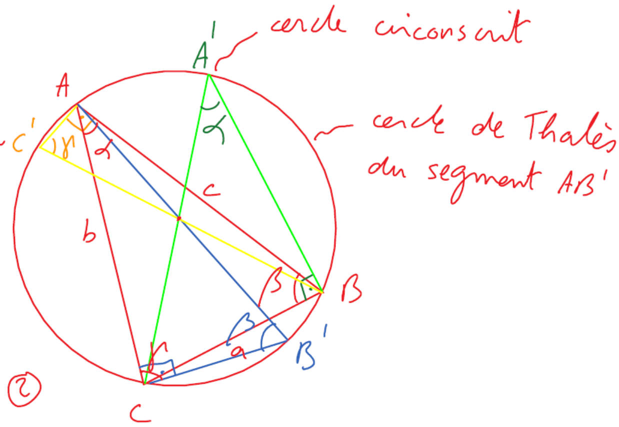
c'est le théorème du cosinus

12.1.2 théorème du sinus

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2r\,,\ r\ = \text{rayon du cercle circonscrit}$$

démonstration :

Th. du sinus :



Le $\Delta AB'C$ est rectangle en C

$\Rightarrow \sin\beta = \dfrac{b}{AB'} = \dfrac{b}{2R}$, avec R = rayon du cercle

$\Rightarrow \boxed{2R = \dfrac{b}{\sin\beta}}$ ①

Le $\Delta A'BC$ est rectangle en B

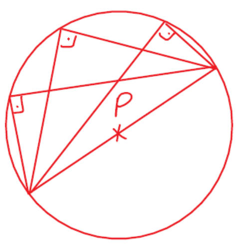
$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{a}{A'C} = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow \boxed{2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}}$ ②

Le $\Delta AC'B$ est rectangle en A

$\Rightarrow \sin\gamma = \dfrac{c}{C'B} = \dfrac{c}{2R} \Rightarrow \boxed{2R = \dfrac{c}{\sin\gamma}}$ ③

① ② ③ $\Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R}$

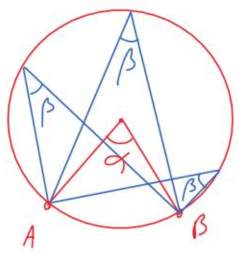
Rappel 1 : cercle de Thalès d'un segment = cercle dont le segment est un diamètre



P = centre du cercle
= milieu du segment

Le cercle de Thalès d'un segment est le lieu géométrique des points d'où l'on voit les extrémités du segment sous un angle droit.

Rappel 2 : angle au centre et angles inscrits d'un arc $\overset{\frown}{AB}$



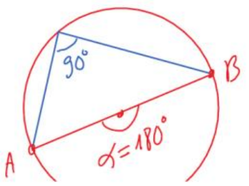
α = angle au centre de $\overset{\frown}{AB}$

β = angles inscrits de $\overset{\frown}{AB}$

↳ $\boxed{\text{ils sont tous égaux}}$

$$\boxed{\alpha = 2\beta}$$

cercle de Thalès

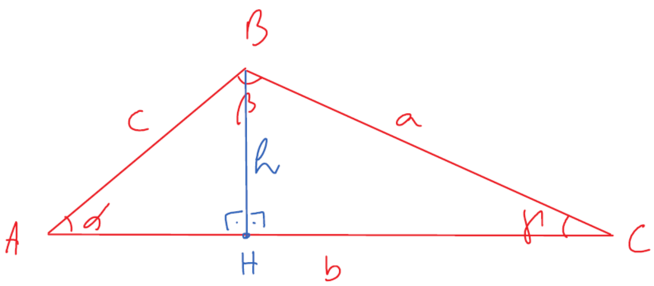


12.1.3 théorème de l'aire

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

Théorème de l'aire :

S = aire du ΔABC



$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{hauteur} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Le ΔBHC est rectangle en $H \Rightarrow \sin\gamma = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin\gamma$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin\gamma \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma}$$

Le ΔAHB est rectangle en $H \Rightarrow \sin\alpha = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin\alpha$

$$\Rightarrow S = \boxed{\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha}$$

On peut aussi trouver que : $\boxed{S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta}$

Exercice 1

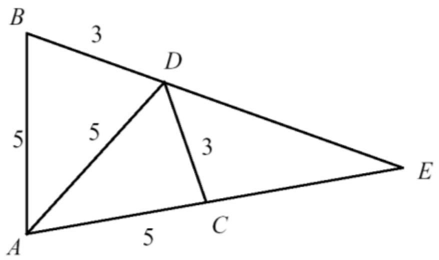
Un observateur, couché sur le sol, voit un satellite sous un angle de 35° avec la verticale. Sachant que le satellite gravite à 1000 km au-dessus de la surface de la Terre, quelle est la distance séparant le satellite de l'observateur (rayon de la Terre : 6370 km) ?
Rép. 1182.588 km

Exercice 2

Un bateau quitte le port à 13h00 et fait route dans la direction 55° W à la vitesse de 38 km/h (les angles sont mesurés avec la direction N). Un deuxième bateau quitte le même port à 13h30 et vogue dans la direction 70° E à 28.5 km/h. Calculez la distance séparant les bateaux à 15h00.
Rép. 106.44 km

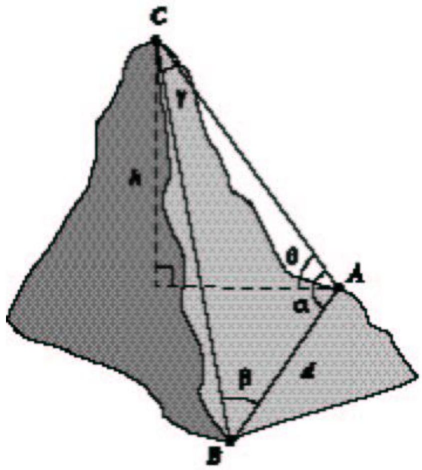
Exercice 3

Quelle est la longueur du segment DE ? Quelle est la surface du triangle ABE ?
Rép. DE = 4.69 ; S = 18.34



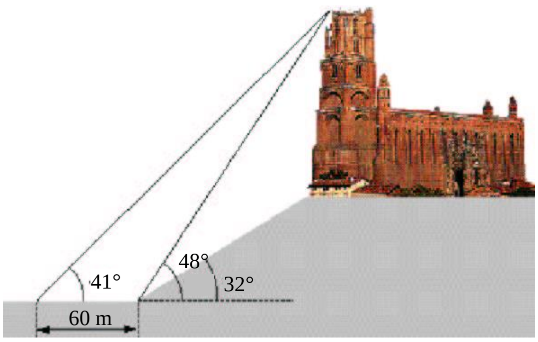
Exercice 4

Pour déterminer l'altitude du sommet *C* d'une montagne, on choisit deux points *A* et *B* au bas de la montagne d'où l'on voit le sommet. *A* et *B* ne sont pas forcément à la même altitude mais ils sont séparés d'une distance *d*. On mesure les angles $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, ainsi que l'angle d'élévation θ sous lequel on voit *C* depuis *A* (angle entre *AC* et l'horizontale). Quelle est l'altitude de *C* si celle de *A* est h_A ?
Application numérique : d = 450 m, h_A = 920 m,
α = 35.4°, β = 105.8°, θ = 23.5°
Rép. 1195.54 m



Exercice 5

Une basilique est située au sommet d'une colline.
Quelle est la hauteur de cette basilique ?
Rép. 105 m



Problèmes tirés d'anciens examens de maturité :

Problème 5, hiver 2008

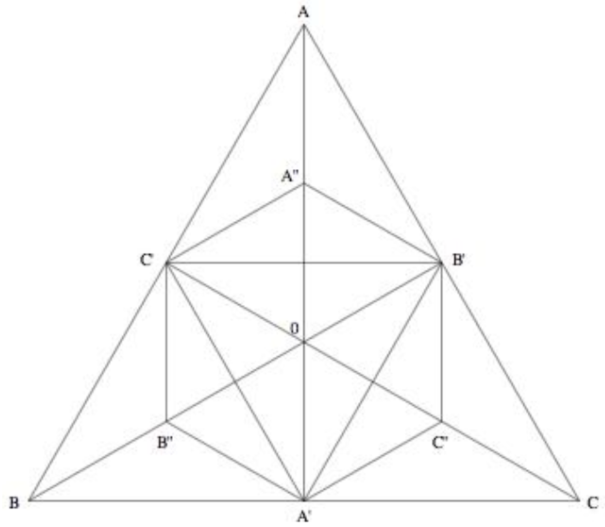
Dans la figure ci-dessous :

le triangle *ABC* est équilatéral ;

O est l'intersection des médianes ;

A", *B"*, *C"* sont les milieux respectivement des segments *OA*, *OB* et *OC* ;

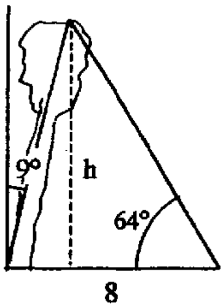
le segment *OA* mesure 2 unités.



1) Que vaut l'aire du triangle *ABC* ?
2) Que vaut l'aire de l'hexagone *A'B"C'A"B'C"* ?
3) Que vaut l'aire du trapèze *B'C'BC* ?

Problème 4, printemps 2003

a) Un arbre s'écarte de 9° de la verticale. A une distance de 8 mètres, son sommet est vu sous un angle de 64°. Quelle est sa hauteur h ?



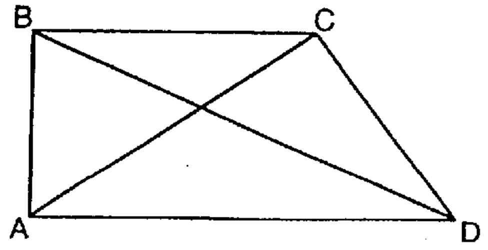
b) Calculer le rapport des aires des triangles équilatéraux respectivement inscrit et circonscrit à un même cercle.

Problème 5, printemps 2000

Dans un trapèze rectangle ABCD, les longueurs des diagonales AC, BD et de la petite base BC valent respectivement 6, 10 et 5.

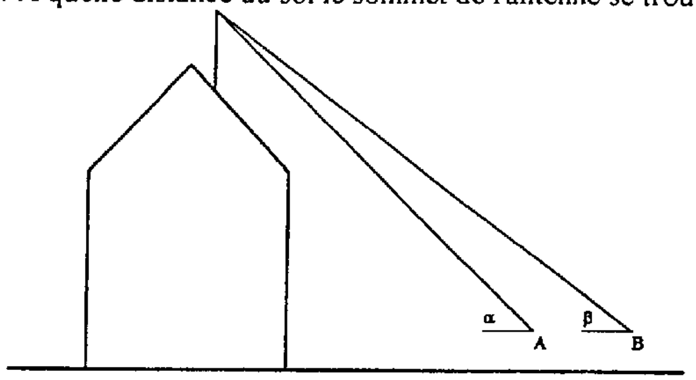
a) quel angle les diagonales font-elles?

b) quelle est l'aire du trapèze?



Problème 4, automne 1999

Le sommet d'une antenne placée sur le toit d'un bâtiment est vu des points A et B sous des angles $\alpha = 40{,}5°$ et $\beta = 36{,}5°$. La distance AB vaut 4,93 mètres. Les points A et B sont situés à 1,68 mètre du sol. A quelle distance du sol le sommet de l'antenne se trouve-t-il ?



Module 13 Trigonométrie (partie 4)

13.1 théorèmes d'addition

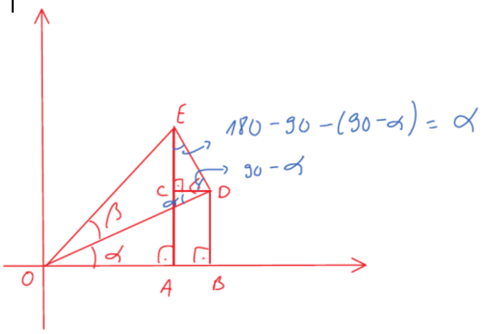
somme et différences d'arcs :

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

double d'arcs :

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$
$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$\sin(\alpha+\beta)=\ ?$



Le Δ OBD est rectangle en B

$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{BD}{OD} \\ \cos\alpha=\dfrac{OB}{OD} \end{cases}$

Le Δ ODE est rectangle en D

$\begin{cases} \sin\beta=\dfrac{ED}{OE} \\ \cos\beta=\dfrac{OD}{OE} \end{cases}$

Le Δ EDC est rectangle en C

$\begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{CD}{ED} \\ \cos\alpha=\dfrac{EC}{ED} \end{cases}$

Le Δ OEA est rectangle en A

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\dfrac{EA}{OE}=\dfrac{EC+CA}{OE}=\dfrac{EC+DB}{OE}=\dfrac{EC}{OE}+\dfrac{DB}{OE}$

$=\dfrac{EC}{ED}\cdot\dfrac{ED}{OE}+\dfrac{DB}{OD}\cdot\dfrac{OD}{OE}$

$=\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta$

$\Rightarrow \boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$

ex. Donner la valeur exacte de $\sin 75°$

$$\sin 75° = \sin(30°+45°) = \sin 30° \cdot \cos 45° + \cos 30° \cdot \sin 45°$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

• $\cos(\alpha+\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + (-\beta)\right)$

$$\boxed{\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \cdot \cos(-\beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \cdot \sin(-\beta)$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot (-\sin\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x \\ \cos(-x) = \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{array}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$\boxed{\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

- $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) \overset{\text{1er théorème d'addition}}{=} \sin\alpha\cdot\cos(-\beta) + \cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$

$\overset{\text{règles du module 11}}{=} \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot(-\sin\beta)$

$= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

- $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) \overset{\text{2ème théorème d'addition}}{=} \cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta)$

$\overset{\text{règles du module 11}}{=} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot(-\sin\beta)$

$= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

- $\tan(\alpha-\beta) = \tan(\alpha+(-\beta)) = \dfrac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)} = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

- $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) \overset{\text{1er théorème d'addition}}{=} \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

- $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) \overset{2^{\text{ème}}\text{ th. d'addition}}{=} \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha$

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \\ \Rightarrow\ &\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \\ &\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \end{aligned}$$

- $\tan(2\alpha) = \tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha} = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Exercice 1 simplifier les expressions suivantes :

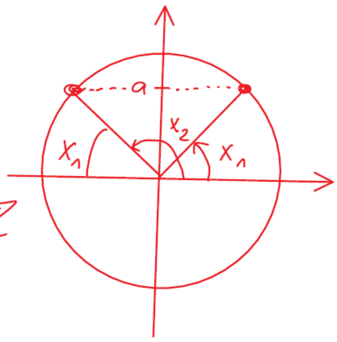
a) $\dfrac{\sin(4t)}{2-8\sin^2 t\cos^2 t}$

b) $\dfrac{\sin t+\sin(2t)}{1+\cos t+\cos(2t)}$

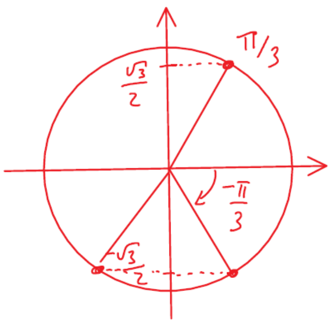
13.2 équations trigonométriques

1) $\sin x = a$, $a \in [-1;1]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sin^{-1} a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x_2 = \pi - \sin^{-1} a + 2k\pi \end{cases} \qquad k\in\mathbb{Z}$$



Notation : $\sin^{-1} a = \arcsin a$



ex : a) $\sin x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \left(\frac{-\pi}{3}\right) + 2k\pi = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

b) Trouver toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle $[0;2\pi]$ telles que $\sin(3x) = 0{,}2$

$\sin(3x) = 0{,}2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = \sin^{-1} 0{,}2 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \sin^{-1} 0{,}2 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 0{,}201 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = 2{,}940 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{0{,}201 + 2k\pi}{3} = 0{,}067 + \dfrac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2{,}94 + 2k\pi}{3} = 0{,}98 + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

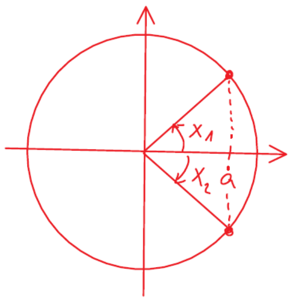
$$\begin{cases} k = -1 \Rightarrow x = -2{,}027 < 0 \\ k = 0 \Rightarrow x = 0{,}067 \\ k = 1 \Rightarrow x = 2{,}161 \\ k = 2 \Rightarrow x = 4{,}256 \\ k = 3 \Rightarrow x = 6{,}35 > 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = -1 \Rightarrow x = -1{,}11 < 0 \\ k = 0 \Rightarrow x = 0{,}98 \\ k = 1 \Rightarrow x = 3{,}074 \\ k = 2 \Rightarrow x = 5{,}169 \\ k = 3 \Rightarrow x = 7{,}263 > 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{0{,}067; 2{,}161; 4{,}256; 0{,}98; 3{,}074; 5{,}169\}$$

2) $\cos x = a \qquad a \in [-1;1]$

$$\begin{cases} x_1 = \cos^{-1} a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x_2 = -\cos^{-1} a + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

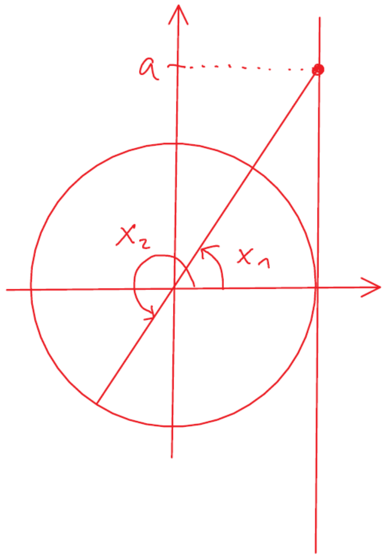


$x_2 = -x_1$

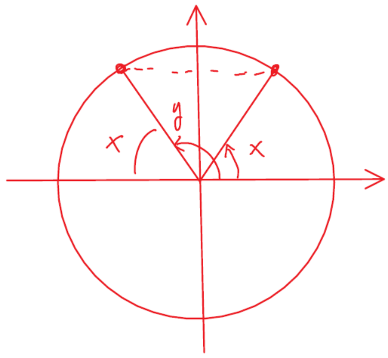
Notation : $\arccos a = \cos^{-1} a$

3) $\tan x = a \qquad a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \tan^{-1} a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x_2 = \pi + \tan^{-1} a + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$



$$\Rightarrow \boxed{x = \tan^{-1} a + k\pi}$$



4) $\sin x = \sin y$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

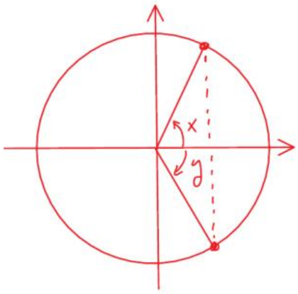
ex. $\sin(2x+3) = \sin(5x-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x-1 = 2x+3 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 5x-1 = \pi-(2x+3) + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow 5x-1 = \pi - 2x - 3 + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 4 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 7x = \pi - 2 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi-2}{7} + \frac{2k\pi}{7} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

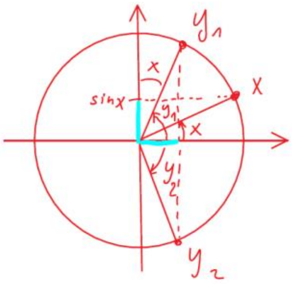
5) $\cos x = \cos y$

$$\begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y = -x + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



6) $\sin x = \cos y$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ y_2 = \frac{-\pi}{2} + x + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



7) $\tan x = \tan y$

$\Rightarrow \; y = x + k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

Exercice 2 résoudre les équations suivantes :

a) $\cos t = \frac{1}{2}$

b) $\sin(4x) = \frac{1}{2}$

c) $\sin x = \cos(3x)$

d) $\tan(2x) = 1$

e) $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

f) $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

g) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$

h) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

i) $\sqrt{3}\tan(x - \frac{\pi}{6}) = 1$

j) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

k) $\sqrt{3}\sin x - 2\sin x \cos x = 0\,,\; x \in [0; 2\pi]$

l) $\tan x = 3\cos x$

Problèmes tirés d'anciens examens de maturité :

Problème 5, hiver 2009

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $4x^4 - x^2 < 18$

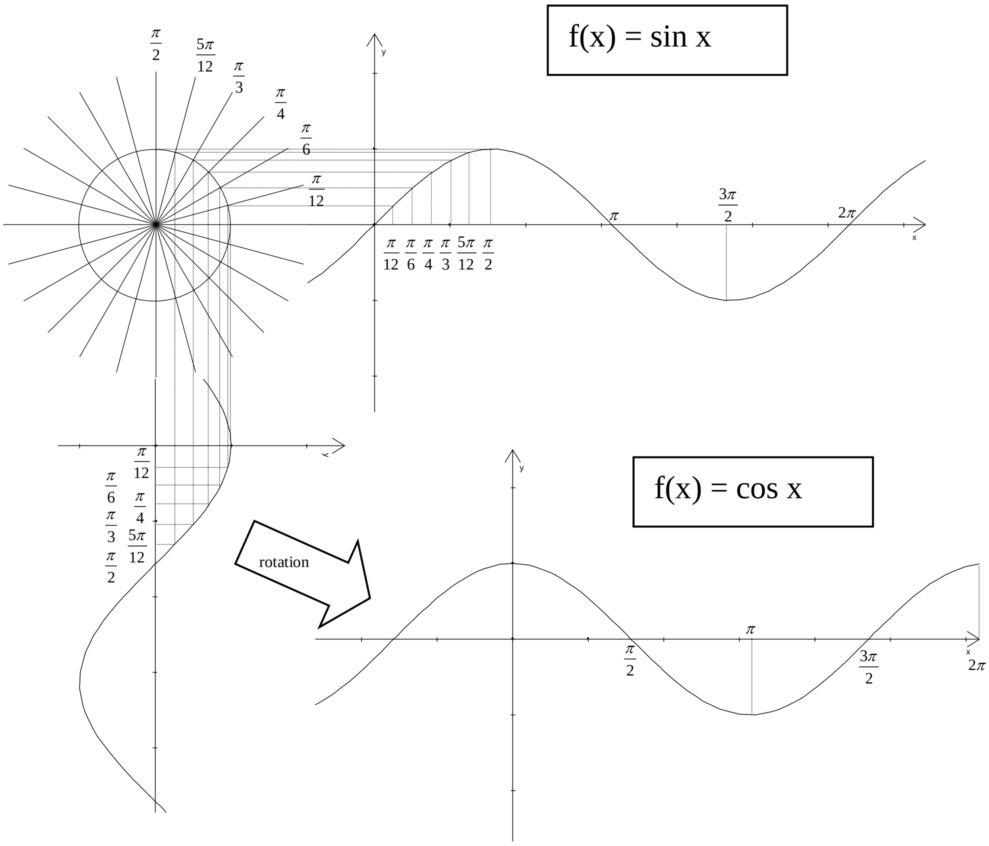
b) $\frac{x^3+4}{x+1} = 4$

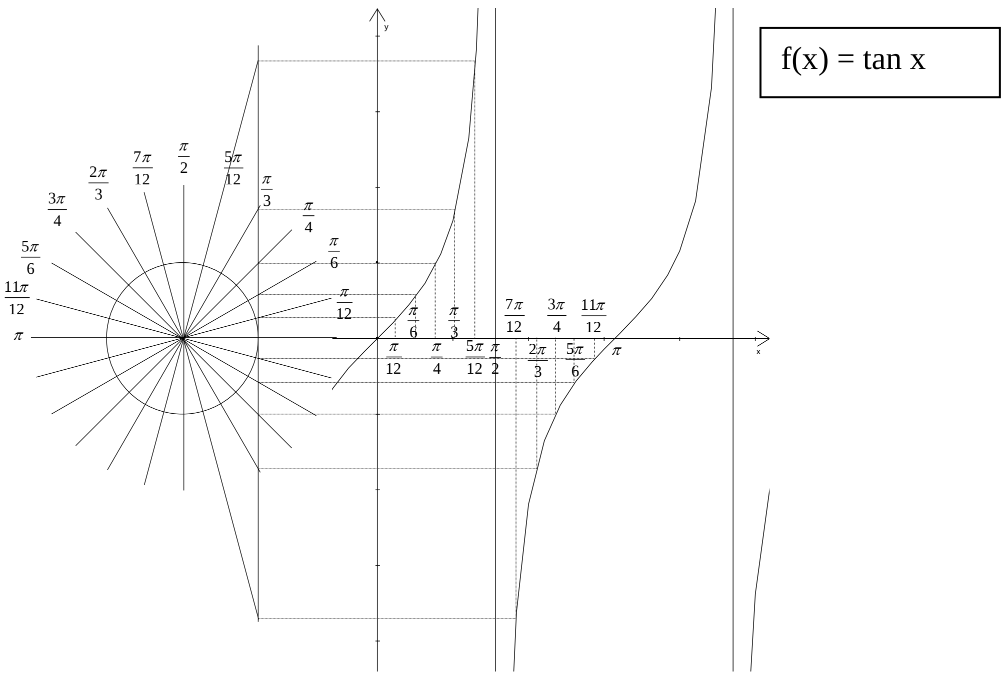
c) $x^3 - 5x + 2 = 0$, après avoir vérifié que $x = 2$ est une solution.

d) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$, ne donner que les solutions comprises dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

Module 14 Fonctions trigonométriques de base

14.1 les fonctions trigonométrique sin(x), cos(x), tg(x) et cotg(x)





14.2 périodicité des fonctions trigonométriques

$\sin(ax)$ est de période T = $\frac{2\pi}{a}$

$\cos(ax)$ est de période T = $\frac{2\pi}{a}$

$\tan(ax)$ est de période T = $\frac{\pi}{a}$

14.3 réciproques des fonctions trigonométriques

La fonction réciproque de $\sin x$ est $\arcsin x$.
Cette fonction est définie de $\left[-1;1\right]$ vers $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
La courbe représentative de $\arcsin x$ est obtenue par symétrie d'axe y = x de la courbe représentant $\sin x$ pour x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction réciproque de $\cos x$ est $\arccos x$.
Cette fonction est définie de $\left[-1;1\right]$ vers $\left[0;\pi\right]$.
La courbe représentative de $\arccos x$ est obtenue par symétrie d'axe y = x de la courbe représentant $\cos x$ pour x appartenant à l'intervalle $\left[0;\pi\right]$.

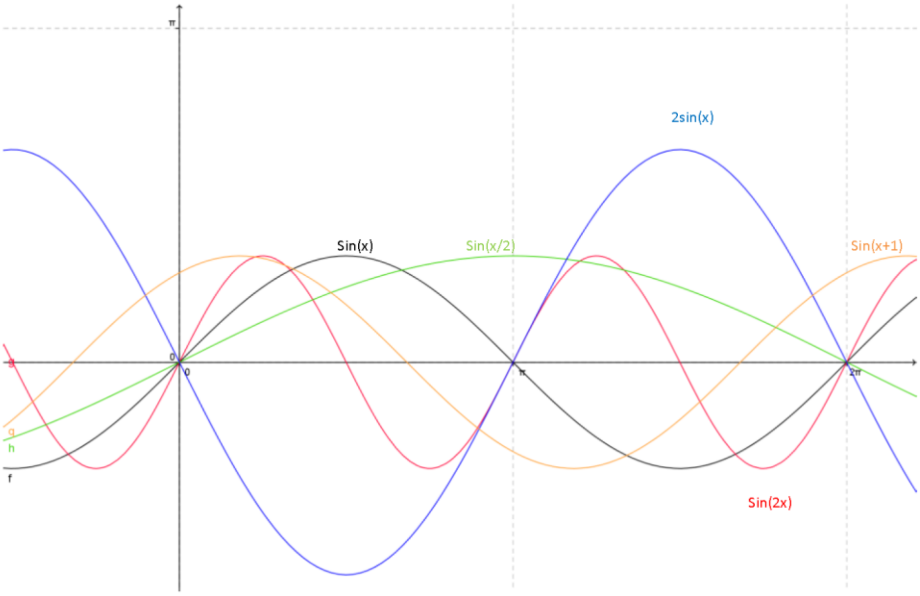
La fonction réciproque de $\tan x$ est $\arctan x$.
Cette fonction est définie de $\left[-\infty;+\infty\right]$ vers $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
La courbe représentative de $\arctan x$ est obtenue par symétrie d'axe y = x de la courbe représentant $\tan x$ pour x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

14.4 Transformations simples de fonctions trigonométriques

Sin(ax)
=> compression horizontale de a fois (a>1) de la courbe de sin(x), par rapport à l'axe Oy
=>étirement horizontal de 1/a fois (0<a<1)

Sin(x+b)
=>translation horizontale de b unités vers la gauche (b>0) ou vers la droite (b<0) de la courbe de sin(x)

Sin(ax+b) => les deux transformations successivement



Exercice 1

Représenter les courbes des fonctions arcsin(x), arccos(x) et arctang(x).

Exercice 2

Représenter les courbes des fonctions

a) $f(x) = \cos(2x)$

b) $g(x) = \sin(\frac{x}{2})$

c) $h(x) = \tan(3x)$

Module 15 Géométrie vectorielle (partie 1)

15.1 notion de vecteur

Bipoint : c'est un couple de points dont l'un est appelé origine et l'autre extrémité.
On représente un bipoint par une flèche allant de l'origine à l'extrémité.

On note le bipoint ci-dessus : $(A;B)$

(AB) = droite
$[AB]$ = segment
$[AB)$ = demi-droite
$(AB]$ = " "

$(B;A) \neq (A;B)$

la direction du bipoint $(A;B)$ est la droite (AB)
la direction du bipoint $(B;A)$ est la droite (AB)

les sens de $(A;B)$ et de $(B;A)$ sont opposés

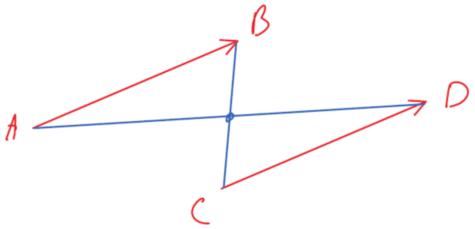
la longueur du bipoint $(A;B)$ est $\underbrace{\text{la distance entre } A \text{ et } B}$

$\delta(A;B) = AB$

$\left\{ \begin{array}{l} (A;B) \text{ et } (B;A) \text{ ont la même direction} \\ \text{les sens de } (A;B) \text{ et } (B;A) \text{ sont opposés} \\ (A;B) \text{ et } (B;A) \text{ ont la même longueur} \end{array} \right.$

<u>relation d'équipollence</u> :

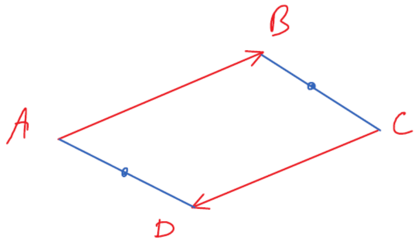
deux bipoints $(A;B)$ et $(C;D)$ sont équipollents si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.



$[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu

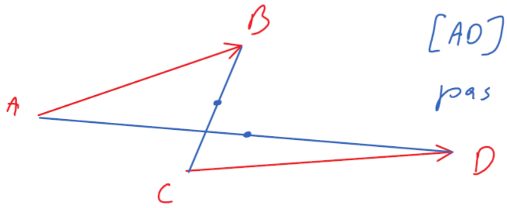
$(A;B)$ est équipollent à $(C;D)$

$\rightarrow (A;B) \sim (C;D)$



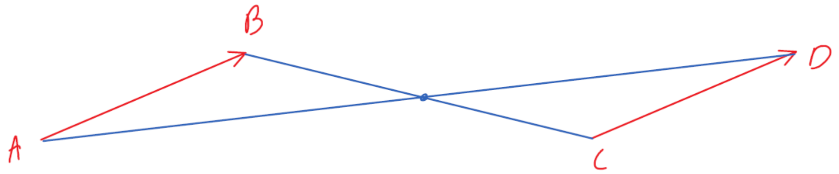
$[AD]$ et $[BC]$ n'ont pas le même milieu

$(A;B) \nsim (C;D)$



$[AD]$ et $[BC]$ n'ont pas le même milieu

$(A;B) \nsim (C;D)$

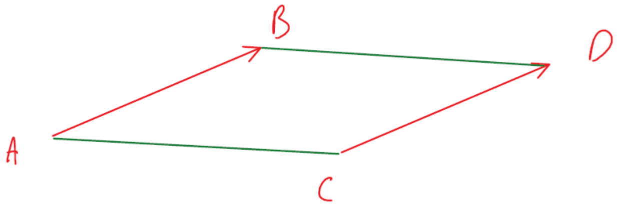


$[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu

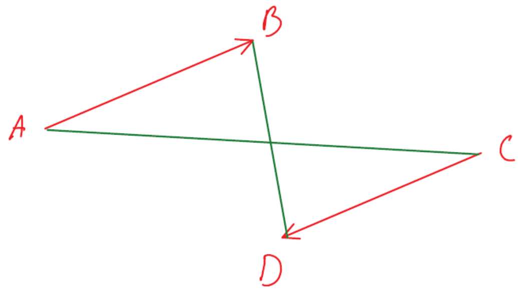
$(A;B) \sim (C;D)$

- On constate que deux bipoints sont équipollents si ils ont
  - même direction
  - même sens
  - même longueur

- on a aussi : $(A;B) \sim (C;D) \iff ABDC$ est un parallélogramme



$ABDC$ est un //gramme
$\Rightarrow (A;B) \sim (C;D)$



$ABDC$ n'est pas un //gramme
$\Rightarrow (A;B) \not\sim (C;D)$

Une relation est une relation d'équivalence si elle est :

réflexive → chaque élément est en relation avec lui-même

symétrique → si $x \mathcal{R} y$ alors $y \mathcal{R} x \quad \forall x, y$

transitive → si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ alors $x \mathcal{R} z \quad \forall x, y, z$

$(A;B) \sim (A;B)$

si $(A;B) \sim (C;D)$ alors $(C;D) \sim (A;B)$

si $(A;B) \sim (C;D)$ et $(C;D) \sim (E;F)$ alors $(A;B) \sim (E;F)$

Une relation réflexive, symétrique et transitive est une relation d'équivalence.

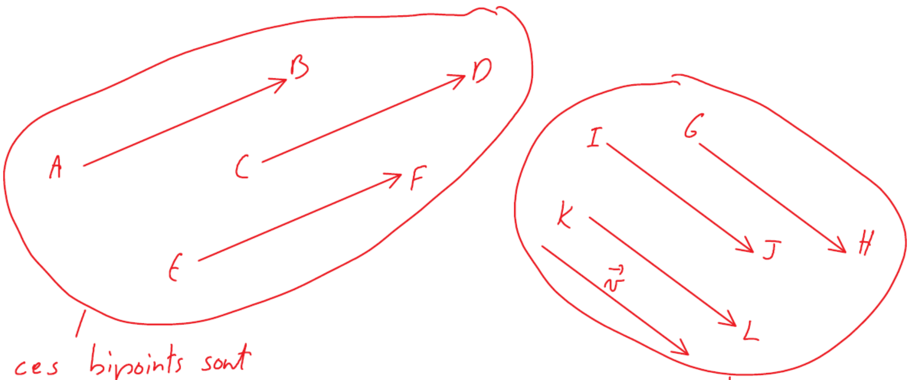
La relation "être égal à" est une relation d'équivalence

$$\text{car} \begin{cases} A = A & \forall A \\ \text{si } A = B \text{ alors } B = A & \forall A, B \\ \text{si } A = B \text{ et } B = C \text{ alors } A = C & \forall A, B, C \end{cases}$$

classe d'équivalence de 3

classe d'équivalence de 5

La relation "être équipollent à" est une relation d'équivalence



ces bipoints sont équipollents entre eux

→ c'est un vecteur : $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF}$

ces bipoints sont équipollents entre eux

→ c'est un autre vecteur

$\vec{v} = \vec{GH} = \vec{IJ} = \vec{KL}$

Définition : un vecteur est l'ensemble des bipoints équipollents entre eux

$$\vec{AB} = \{ (M;N) \text{ t.q. } (M;N) \sim (A;B) \}$$

- l'ensemble des vecteurs de dimension 2 est noté : V_2
- " " " 3 " : V_3
- Le vecteur nul est noté : $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$
- La norme d'un vecteur est la longueur de n'importe quel bipoint représentant le vecteur, on la note : $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

norme = longueur = valeur = module du vecteur

Propriétés :

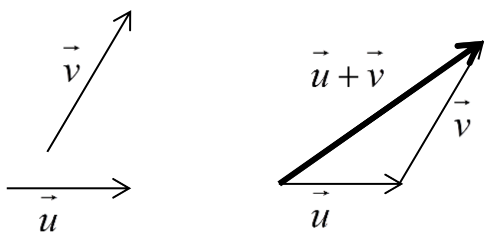
1) $\vec{u} = \vec{O} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0$
2) $\|\vec{u}\| \geq 0$
3) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$

15.2 opérations sur les vecteurs

Soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ainsi que les scalaires (nombres réels) α, β, λ, μ

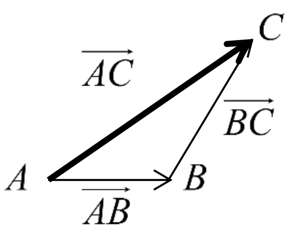
15.2.1 addition

On obtient un représentant du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ en considérant la flèche (ou bipoint) reliant l'origine du vecteur $\vec{u}$ à l'extrémité du vecteur $\vec{v}$ placé de manière à ce que l'origine du vecteur $\vec{v}$ coïncide avec l'extrémité du vecteur $\vec{u}$.



Relation de Chasles :

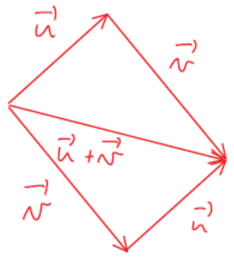
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

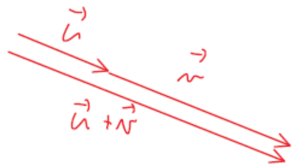


Propriétés :

4) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire)

5) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ (commutativité de l'addition vectorielle)





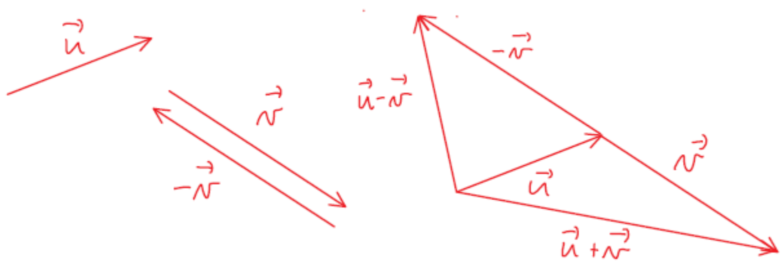
6) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associativité de l'addition vectorielle)

7) $\vec{O}+\vec{u} = \vec{u}+\vec{O} = \vec{u}$ ($\vec{O}$ est l'élément neutre de l'addition vectorielle)

15.2.2 opposé et soustraction

Le vecteur opposé de $\vec{v}$ est un vecteur de même longueur (norme), de même direction, mais de sens contraire. On le note $-\vec{v}$. Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ est obtenu en additionnant $\vec{u}$ et l'opposé de $\vec{v}$:

$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est noté : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Propriétés :

8) $(-\vec{u})+\vec{u} = \vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{O}$ ($-\vec{u}$ est l'opposé de $\vec{u}$ pour l'addition vectorielle)

15.2.3 multiplication par un scalaire

Multiplication par un scalaire : nombre $\in \mathbb{R}$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$$
$$(\alpha ; \vec{v}) \mapsto \alpha \cdot \vec{v}$$

produit cartésien

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x ; y) \mapsto x + y$$

$\alpha \cdot \vec{v}$ est un vecteur

- de même direction que $\vec{v}$
- de même sens que $\vec{v}$ si $\alpha > 0$
  de sens opposé à celui de $\vec{v}$ si $\alpha < 0$
- $\|\alpha \cdot \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$

$A \times B$

A: a, b, c B: 1, 2

$A \times B = \{(a;1) ; (a;2) ; (b;1) ; (b;2)$
$(c;1) ; (c;2)\}$

exemple :

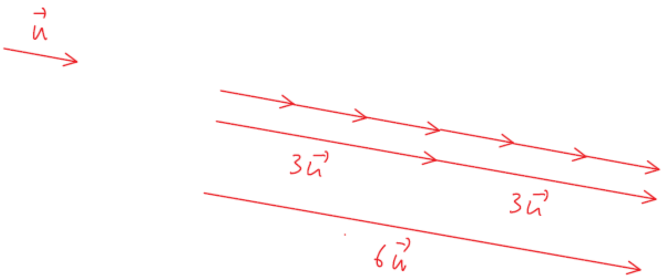
le vecteur $2 \cdot \vec{u}$ est un vecteur de même direction que $\vec{u}$
de même sens que $\vec{u}$
dont la norme est égale à 2 fois celle de $\vec{u}$
longueur

Propriétés :

9) $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$
10) $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$
11) $1\vec{u} = \vec{u}$
12) $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
13) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
14) $0\vec{u} = \vec{O}$
15) $\lambda\vec{O} = \vec{O}$
16) $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$

Exemple propriété 10)

$2 \cdot (3 \cdot \vec{u}) = (2 \cdot 3) \cdot \vec{u} = 6\vec{u}$



15.3 combinaison linéaire de vecteurs

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...,\vec{m}$, de coefficients respectifs $\alpha,\beta,\gamma,...,\mu$, le vecteur $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+...+\mu\vec{m}$.
Des vecteurs sont dits **linéairement dépendants** si l'un d'eux au moins est une combinaison linéaire des autres. Dans le cas contraire, ils sont dits **linéairement indépendants**.
Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de V_2 sont linéairement indépendants si et seulement si, quels que soient les réels α et β, on a :

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha=\beta=0$$

Combinaison linéaire de vecteurs :

combiner linéairement des vecteurs consiste à additionner ces vecteurs après les avoir multipliés par un scalaire.

ex :

$3\vec{u}+4\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$2\vec{u}+(-5\vec{v}) = 2\vec{u}-5\vec{v}$ est une autre combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$\vec{u}+3\vec{v}+\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$

15.4 vecteurs colinéaires ou coplanaires

vecteurs colinéaires : 2 vecteurs sont colinéaires si ils ont la même direction

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$$

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors α n'existe pas

et $\vec{u} \neq \alpha \cdot \vec{v}$

$\|\vec{v}\| = 2 \cdot \|\vec{u}\|$

$\vec{v} \neq 2\vec{u}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

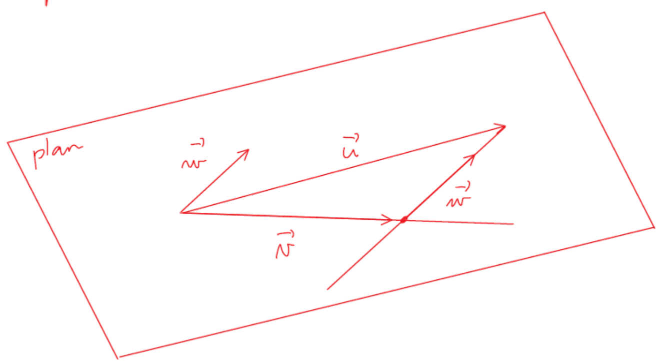
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

vecteurs coplanaires : des vecteurs coplanaires sont dans un même plan (vectoriel)

3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

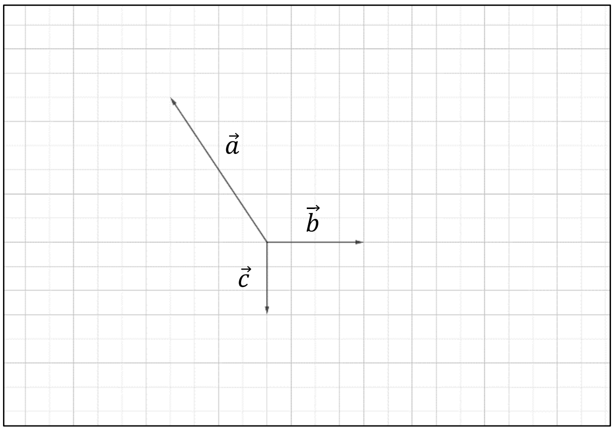
(si l'un est obtenu par combinaison linéaire des autres)



$\vec{u} = 1{,}1\,\vec{v} + 1{,}5\,\vec{w}$

Exercice 1

Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ trois vecteurs.
Représenter les vecteurs :



a) $\vec{i} = -\vec{b}$

b) $\vec{j} = \dfrac{2}{3}\vec{b}$

c) $\vec{k} = -\dfrac{1}{2}\vec{b}$

d) $\vec{l} = \sqrt{3}\vec{b}$

e) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$

f) $\vec{n} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

g) $\vec{p} = 3\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$

h) $\vec{q} = \dfrac{5}{4}\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$

construire les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ tels que

i) $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$

j) $\vec{a} - 2\vec{y} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

Exercice 2

A, B, C, D, E sont des points quelconques, exprimer plus simplement les vecteurs :

$\vec{a} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$
$\vec{b} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$
$\vec{c} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

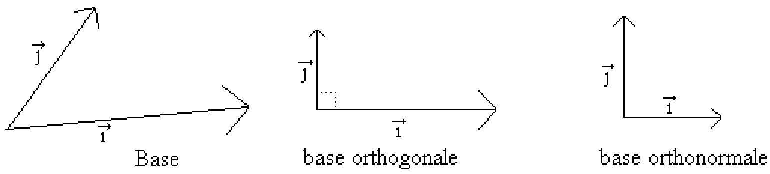
Exercice 3

Soit le parallélogramme $ABCD$. On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Soit encore M le milieu de $[BC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{DM}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

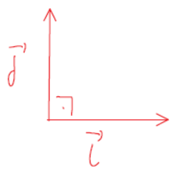
Module 16 Géométrie vectorielle (partie 2)

16.1 base de vecteurs, composantes d'un vecteur, repère et coordonnées d'un point

Une **base de vecteur** dans le plan est un couple $(\vec{i};\vec{j})$ de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires. Dans le cas où $\vec{i}\perp\vec{j}$ on dit que cette base est orthogonale (ou orthonormale), si de plus $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$ on dit que cette base est orthonormée.



si la base $(\vec{i};\vec{j})$ est la suivante :



$$\left.\begin{array}{l}\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\| \\ \vec{i}\perp\vec{j}\end{array}\right\}\ \text{base orthonormée}$$

$\Downarrow$

base canonique

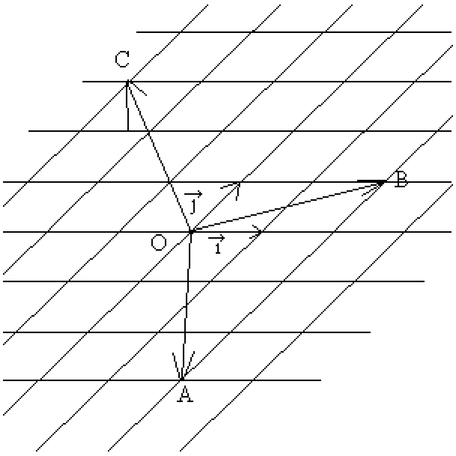
Quelles sont les composants de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$?

$$\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\vec{i}+0\vec{j}$$

$$\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0\vec{i}+1\vec{j}$$

Soit $(\vec{i};\vec{j})$ une base de vecteurs du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un couple unique $(x;y)$ de réels tels que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Ce couple $(x;y)$ est appelé **composantes** du vecteur $\vec{u}$ relativement à la base $(\vec{i};\vec{j})$. On note alors : $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Un **repère** du plan est un triplet $(O;\vec{i};\vec{j})$ dans lequel O est un point fixe du plan et $(\vec{i};\vec{j})$ forment une base de vecteurs du plan.
D'après la définition des composantes d'un vecteur dans la base $(\vec{i};\vec{j})$, à tout point M du plan du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, on peut associer un seul couple de réels $(x;y)$ tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, ce couple de réels s'appelle coordonnées du point M dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Les réels x et y sont respectivement appelés abscisse et ordonnée du point M.



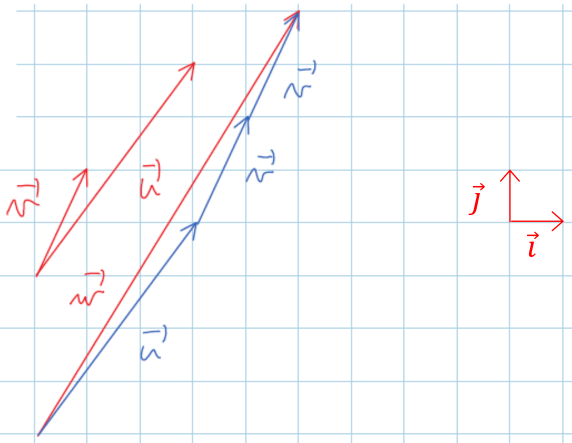
$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad A(2;-3)$

$\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B(2;1)$

$\overrightarrow{OC} = -3\vec{i} + 3\vec{j} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad C(-3;3)$

Exemple :

Dans la base canonique on donne les vecteurs :



$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Trouver les composantes de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u} ; \vec{v})$

$$\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 4x + 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 3x + y & \cdot (-2) \\ 8 = 4x + 2y & \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 = -6x - 2y \\ 8 = 4x + 2y \end{cases}$$

$$-2 = -2x \Rightarrow x = 1 \rightarrow 8 = 4 \cdot 1 + 2y$$

$$\Rightarrow 4 = 2y \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{(\vec{u} ; \vec{v})}$$

Opérations avec les composantes :

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par rapport à une base $(\vec{i}\,;\vec{j})$

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

on a : $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}$

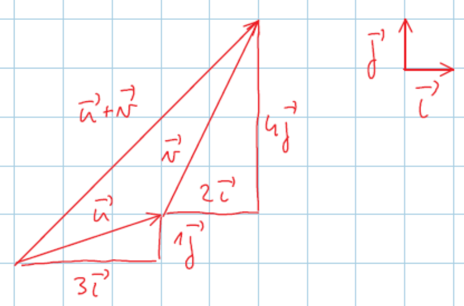
$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}$

addition :

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}$$

$$= (u_1 + v_1)\,\vec{i} + (u_2 + v_2) \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}}$$



$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Multiplication par un scalaire :

$$\alpha \vec{u} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \alpha \left(u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} \right)$$

$$= \alpha u_1 \vec{i} + \alpha u_2 \vec{j} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\alpha \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \alpha u_3 \end{pmatrix}}$$

ex :

$$3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}$$

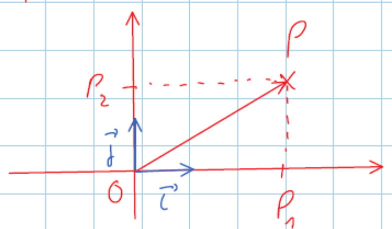
Opposé d'un vecteur :

$$-\vec{u} = -\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -\left(u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} \right) = -u_1 \vec{i} - u_2 \vec{j} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{-\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix}}$$

Composantes d'un vecteur donné par des points :

Soit $P(p_1 ; p_2)$ un point avec $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$



$\|\vec{i}\| = 1$

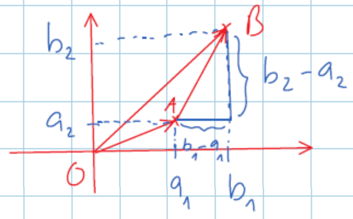
$\|\vec{j}\| = 1$

Quelles sont les composantes de $\vec{OP}$?

$$\vec{OP} = p_1 \cdot \vec{i} + p_2 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Soient $A(a_1 ; a_2)$ et $B(b_1 ; b_2)$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

Quelles sont les composantes de $\vec{AB}$?



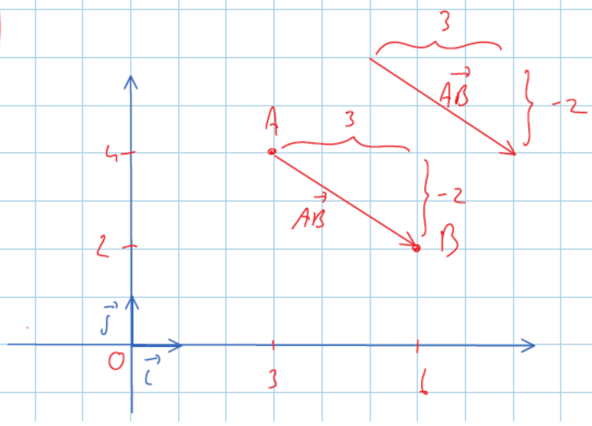
$\vec{AB} = ?$

on a : $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ (relation de Chasles)

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

16.2 norme d'un vecteur et distance de deux points

Norme d'un vecteur $\vec{u}$:

si $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

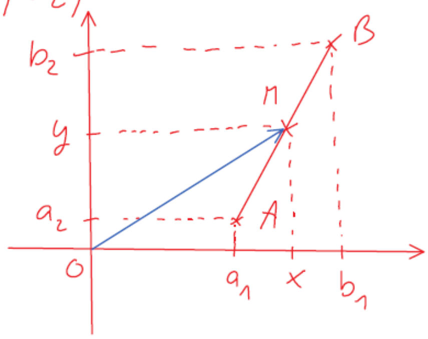
Norme du vecteur $\vec{AB}$ ou distance entre les points A et B :

$$\delta(A;B) = \|\vec{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

16.3 coordonnées du milieu d'un segment

Soit $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$

Quelles sont les coordonnées du point $M(x; y)$ milieu du segment $[AB]$.



$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$$

$$= \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{2}(b_1 - a_1) \\ a_2 + \frac{1}{2}(b_2 - a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}a_1 \\ a_2 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 \\ \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}b_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 + b_1}{2} \\ \frac{a_2 + b_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2} ; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)}$$

en 3D : $M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2} ; \frac{a_2 + b_2}{2} ; \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$ avec $A(a_1; a_2; a_3)$
$B(b_1; b_2; b_3)$

16.4 coordonnées du centre de gravité d'un triangle

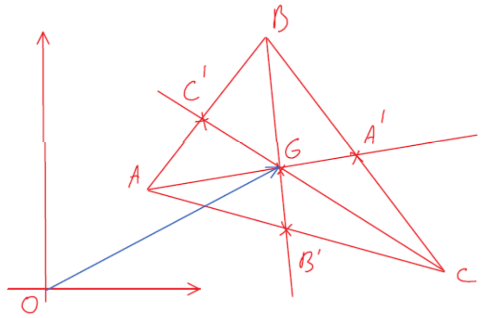
Centre de gravité d'un triangle :

$A(a_1; a_2)$

$B(b_1; b_2)$

$C(c_1; c_2)$

$G(x; y)$ = centre de gravité du ΔABC



G = intersection des médianes

B' = milieu de AC
A' = milieu de BC
C' = milieu de AB

Les médianes se coupent en G en $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} CG = \frac{2}{3} CC' \\ AG = \frac{2}{3} AA' \\ BG = \frac{2}{3} BB' \end{cases}$$

donc $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG}$

A' = milieu de $BC = \left(\frac{b_1+c_1}{2} ; \frac{b_2+c_2}{2}\right)$

$$= \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AA'}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{b_1+c_1}{2} - a_1 \\ \frac{b_2+c_2}{2} - a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{b_1+c_1-2a_1}{2} \\ \frac{b_2+c_2-2a_2}{2} \end{pmatrix}$$

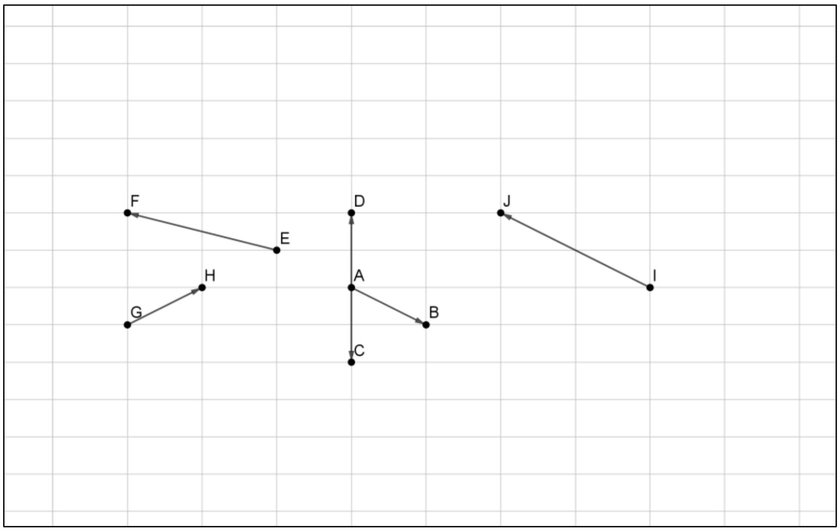
$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b_1+c_1-2a_1}{3} \\ \frac{b_2+c_2-2a_2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{b_1+c_1-2a_1}{3} \\ a_2 + \frac{b_2+c_2-2a_2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3a_1+b_1+c_1-2a_1}{3} \\ \frac{3a_2+b_2+c_2-2a_2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1+c_1}{3} \\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{G = \left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3} ; \frac{a_2+b_2+c_2}{3} \right)}$$

En 3D : $\quad G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3} ; \frac{a_2+b_2+c_2}{3} ; \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$

Exercice 1



Soit la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}; \vec{e_2})$, où $\vec{e_1} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{e_2} = \overrightarrow{AC}$.
On pose $\vec{a} = \overrightarrow{EF}$, $\vec{b} = \overrightarrow{GH}$, $\vec{c} = \overrightarrow{IJ}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$.

1) Dans le dessin ci-dessus, représenter les vecteurs suivants, donnés relativement à la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$:

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2) Représenter les vecteurs $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{c} - (\vec{a} - \vec{b})$.

3) Trouver les composantes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ relativement à la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$.

4) Calculer les composantes de $\vec{e_1}$ et de $\vec{e_2}$ relativement à la base $(\vec{a}; \vec{b})$.

5) Déterminer deux nombres λ et μ tels qu'on ait :

$$\vec{a} + \lambda\vec{b} = \mu\vec{c}$$

Exercice 2

Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

1) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ 2) $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ 3) $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$

Exercice 3

Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Déterminer deux nombres réels α et β tels que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$

Exercice 4

Relativement à une base $\mathcal{B}$ de V_2, on donne les vecteurs :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire au vecteur $\vec{a}$ tels que $\vec{x} + \lambda\vec{b} = \vec{c}$

Exercice 5

On considère les points $A(-3; 4)$, $B(5; -2)$ et $C(1; 8)$.

1) Trouver les coordonnées des milieux respectifs A', B' et C' de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
2) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$, puis calculer la somme $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

Exercice 6

1) Trouver les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on donne deux sommets $A(6; -1)$, $B(-2; 6)$ et le centre de gravité $G(3; 4)$.
2) Même question avec $A(10; 6)$, $B(-6; 4)$ et $G(-1; -4)$.

Exercice 7

On donne les points $A(5; 3)$, $B(3; 6)$, $C(4; 7)$ et $H(1; 2)$.
Trouver les coordonnées des images de A, B et C par la symétrie centrale de centre H.

Exercice 8

On donne les points $A(-2; 3)$, $B(0; -1)$, $C(1; 4)$ et $K(2; -1)$.
Trouver les coordonnées des images de A, B et C par l'homothétie de centre K et de rapport 2.

Exercice 9

On donne les points $A(4; -1)$ et $B(-5; 11)$. Déterminer les points de la droite (AB) situés à la distance 3 de A.

Exercice 10

On donne les vecteurs $\vec{a} = \binom{2}{3}$ et $\vec{b} = \binom{-2}{4}$. Déterminer le nombre réel k pour que le vecteur $\vec{a} + k\vec{b}$ ait une norme égale à $\sqrt{82}$.

Exercice 11

On donne les points $A(1;3)$, $B(-8;12)$ et $C(1;2)$. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

Exercice 12

Vérifier que le triangle de sommets $A(-4;-2)$, $B\left(\frac{4}{5};\frac{22}{5}\right)$ et $C\left(\frac{24}{5};-\frac{18}{5}\right)$ est isocèle. Calculer son aire.

Exercice 13

On donne les points $A(7;1)$, $B(5;5)$, $C(5;-3)$ et $I(2;1)$.
Montrer que les points A, B et C sont sur un cercle de centre I.

Exercice 14

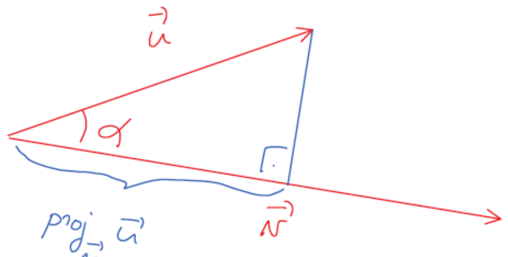
1) Calculer les longueurs des côtés du quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A(-2;1)$, $B(5;2)$, $C(10;7)$ et $D(3;6)$.
   Que peut-on dire de ce quadrilatère ?
2) Même question avec : $A(-5;4)$, $B(2;8)$, $C(10;7)$ et $D(3;3)$.

16.5 produit scalaire et angle entre deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'une base orthonormée. Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un **nombre réel** (scalaire) noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, défini par :

$$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) \longmapsto \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\underbrace{\sphericalangle(\vec{u}\,;\vec{v})}_{\alpha}$$



$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$

$\parallel$

longueur projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$

interprétation géométrique

cos α

$$\cos\alpha = \frac{\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \cancel{\|\vec{u}\|}\cdot\|\vec{v}\|\left(\frac{\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}}{\cancel{\|\vec{u}\|}}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|\cdot\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u}$$

Produit scalaire avec les composantes :

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs dont les composantes sont données dans une base orthonormée $(\vec{i};\vec{j})$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (u_1\cdot\vec{i} + u_2\cdot\vec{j})\cdot(v_1\cdot\vec{i} + v_2\cdot\vec{j})$$

$$= u_1\cdot v_1\cdot\vec{i}\cdot\vec{i} + u_2 v_1\cdot\vec{i}\cdot\vec{j} + u_1 v_2\cdot\vec{i}\cdot\vec{j} + u_2 v_2\cdot\vec{j}\cdot\vec{j}$$

on a : $\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{\vec{i}^2} = \|\vec{i}\|\cdot\|\vec{i}\|\cdot\underbrace{\cos 0°}_{=1} = \|\vec{i}\|\cdot\|\vec{i}\| = \|\vec{i}\|^2 = 1^2 = 1$

$$\boxed{\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2}$$

$\vec{j}\cdot\vec{j} = \ldots = 1$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = \|\vec{i}\|\cdot\|\vec{j}\|\cdot\underbrace{\cos 90°}_{=0} = 0$

$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1\cdot 1 + u_2\cdot v_1\cdot 0 + u_1\cdot v_2\cdot 0 + u_2\cdot v_2\cdot 1$

$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2}$$

exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 10 + (-24) = -14$$

En 3D :

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

Angle entre 2 vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha \qquad \alpha \to \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \cos^{-1} \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}}$$

en 2D

$$\sphericalangle(\vec{u}; \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\right)$$

en 3D

$$\sphericalangle(\vec{u}; \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}\right)$$

exemple : Soit $A(2;5)$ et $B(10;1)$ et $C(0;-4)$

Trouver l'angle $\sphericalangle ABC \rightarrow 53,13°$

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix} 2-10 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0-10 \\ -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix} = 80 - 20 = 60$$

$$\|\vec{BA}\| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2} = \sqrt{125}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{60}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{125}}\right)$$

$$= \cos^{-1}(0,6) = 53,13°$$

propriétés :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2) $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3) $\vec{u} \cdot \left(\lambda \vec{v}\right) = \lambda \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$
4) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
5) $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ ou $\vec{u}^{\,2} = \left\|\vec{u}\right\|^2$

si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors $\vec{u} \perp \vec{v}$
si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exercice 15

On donne les vecteurs suivants :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{h} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

1) Calculer

$\vec{a} \cdot \vec{c}$ $\vec{a} \cdot \vec{e}$ $\vec{b} \cdot \vec{d}$ $\vec{b} \cdot \vec{f}$ $\vec{c} \cdot \vec{g}$ $\vec{c} \cdot \vec{k}$ $\vec{e} \cdot \vec{f}$

$(\vec{a} + \vec{f}) \cdot (\vec{g} - \vec{h})$ $\vec{d} \cdot (\vec{e} - \vec{f})$ $\vec{g} \cdot (\vec{h} + 2\vec{k})$ $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{d} - 2\vec{h} + \vec{f})$.

2) Dans l'ensemble des vecteurs donnés, trouver les paires de vecteurs orthogonaux.

Exercice 16

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ dont les sommets sont $A(0;2)$, $B(6;6)$, $C(8;3)$ et $D(2;-1)$ est un rectangle.

Exercice 17

On donne les points $A(-4;-3)$, $B(2;0)$ et $C(0;4)$. Montrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires. Déterminer le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 18

Déterminer le nombre réel λ pour que le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$ soit orthogonal au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 19

Soit les deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{v}$ tels qu'on ait :

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} + \vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{v} \perp \vec{a}$$

Exercice 20

Calculer les composantes d'un vecteur $\vec{b}$ orthogonal au vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ et tel que $\|\vec{b}\| = \frac{13}{2}$

Exercice 21

On donne les points $A(2; 1)$ et $B(3; -5)$.

1) Déterminer les sommets C et D d'un carré $ABCD$ dont $[AB]$ est un côté.
2) Déterminer les sommets P et Q d'un carré $APBQ$ dont $[AB]$ est une diagonale.

Exercice 22

Soit les points $A(0; 4)$, $B(3; -2)$, $C(-3; 4)$ et $D(-6; -4)$. Déterminer le point P de la droite (CD) équidistant de A et de B.

Exercice 23

On donne les deux points $B(3; 4)$ et $C(1; -2)$. Trouver un point A tel que le triangle ABC soit rectangle et isocèle en A.

Exercice 24

On donne les points $A(-2; 4)$, $B(1; -2)$ et $C(\lambda; \lambda)$. Pour quels nombres réels λ le triangle ABC est-il rectangle ? Parmi les solutions, trouve-t-on des cas où le triangle est également isocèle ?

Exercice 25

On donne les points $A(1; 4)$, $B(5; 2)$ et $C(\lambda; 5)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer tous les points C du plan tels que le triangle de sommets A, B et C soit un triangle rectangle. Parmi les triangles trouvés, en est-il qui sont isocèles ?

Exercice 26

On donne les trois points $A(2; 3)$, $P(10; -3)$ et $Q(4; 9)$.

1) Trouver deux points B et C sur la droite (PQ) tels que le triangle ABC soit isocèle en A et que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 5$.
2) Trouver deux points D et E de la droite (PQ), ainsi qu'un point F, tels que le quadrilatère $ADEF$ soit un carré.

Exercice 27

On donne les points $A(0; 0)$ et $B(6; 6)$. Trouver deux points C et D tels que le quadrilatère $ACBD$ soit un losange dont la diagonale $[CD]$ a une longueur double de celle de la diagonale $[AB]$.

Exercice 28

Soit les points $A(0;0)$, $B(0;3)$, $C(3;4)$ et $D(4;0)$. Trouver les milieux respectifs R, S, T et U de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et montrer qu'ils sont les sommets d'un carré.

Exercice 29

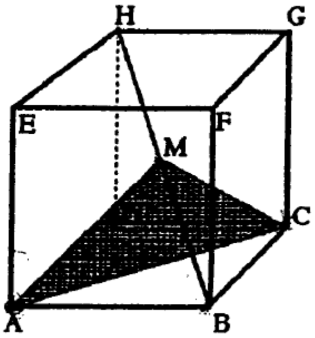
On donne les points A(-2 ;1), B(2 ;-2) et C(4 ;4).

1) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC
2) Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le point (3/2 ; 3/2)
3) Calculer l'aire du triangle ABC
4) Calculer les angles du triangle ABC

Exercice 30 (printemps 94, Fribourg)

PROBLEME 5 **A choix avec les problèmes 3 , 4 et 6 .**

On considère le cube ABCDEFGH dont le côté est de longueur 6cm.
Un point quelconque M se situe sur BH.
On pose α = angle ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MC}$) .

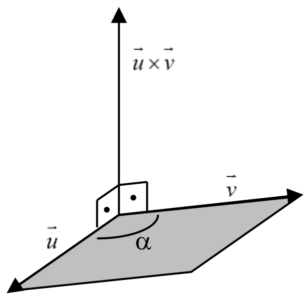


a) Calculer α dans les 3 cas suivants .
- **M est le milieu de BH.**
- **M est confondu avec H.**
- **M est confondu avec B.**

b) On considère la position de M pour laquelle AM est perpendiculaire à BH .
- **Calculer les longueurs des segments AM et BM ainsi que le volume de la pyramide MABCD.**
- **Montrer que cette position de M sur BH correspond à la valeur maximale de α. Que vaut α dans ce cas ?**

Module 17 Géométrie vectorielle (partie 3)

17.1 définition du produit vectoriel



Produit vectoriel :

$$V_3 \times V_3 \to V_3$$

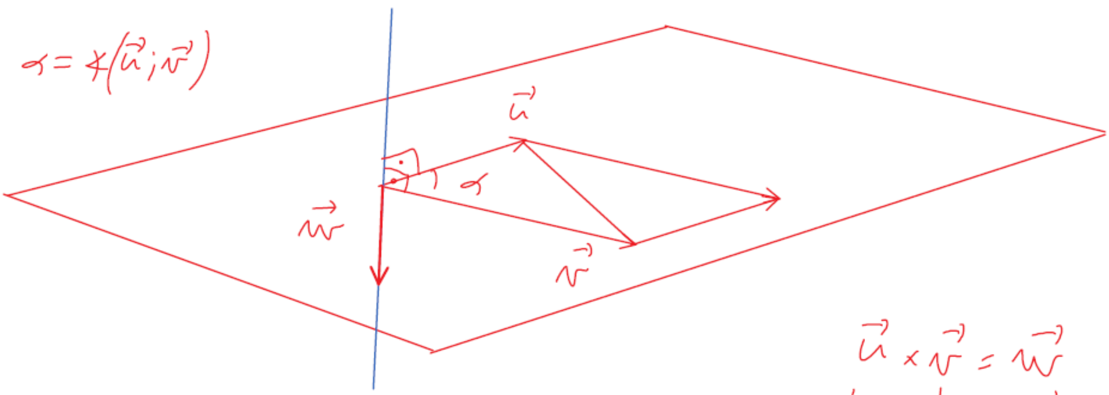
$$(\vec{u} ; \vec{v}) \mapsto \vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$

ou $\vec{u} \wedge \vec{v}$

- la direction de $\vec{w}$ est perpendiculaire à celles de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$
- le sens de $\vec{w}$ est donné par la règle main droite ou du tire-bouchon.
- la valeur de $\vec{w}$ est donnée par :

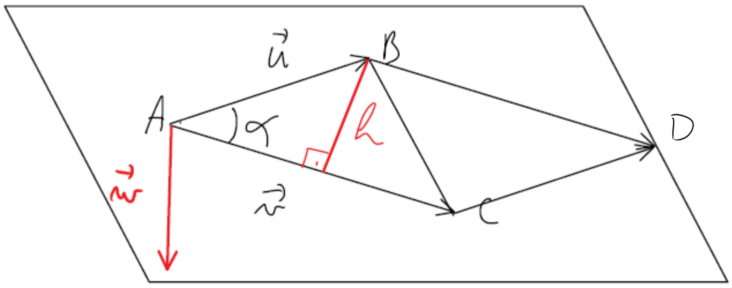
$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \measuredangle(\vec{u};\vec{v})$$

$\alpha = \measuredangle(\vec{u};\vec{v})$



$$\underbrace{\vec{u}}_{\text{pouce}} \times \underbrace{\vec{v}}_{\text{index}} = \underbrace{\vec{w}}_{\text{majeur}}$$

Remarque:



$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\alpha$$

on a: $\sin\alpha = \dfrac{h}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow h = \|\vec{u}\| \cdot \sin\alpha$

hauteur

$$\Rightarrow \|\vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot h = AC \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot h$$

base du ΔABC

$\Rightarrow \|\vec{w}\| = 2 \cdot$ Aire du ΔABC

$\Rightarrow \|\vec{w}\| =$ Aire du parallélogramme formé par $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

Calcul de $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ avec les composantes:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

17.2 propriétés : soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs, ainsi que λ un nombre réel

a) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
b) $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$
c) $\vec{u} \times \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) + \left(\vec{u} \times \vec{w}\right)$
d) $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \times \vec{w} = \left(\vec{u} \times \vec{w}\right) + \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$
e) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants
f) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

17.3 calcul de la surface d'un parallélogramme à l'aide du produit vectoriel

La surface d'un parallélogramme $ABDC$ peut se calculer comme indiqué ci-dessus grâce au produit vectoriel :

$S = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot sin\alpha$, où α est l'angle en A du parallélogramme.

17.4 calcul de la surface d'un triangle à l'aide du produit vectoriel

La surface d'un triangle ABC (qui est la moitié d'un parallélogramme) peut donc aussi se calculer grâce au produit vectoriel :

$S = \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \sin\alpha}{2}$, où α est l'angle en A du triangle ABC.

Exercice 1

On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Calculer $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ et $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c}$

Exercice 2

1) On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$?

2) On donne les vec teurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Pour quelle valeur de b existe-t-il des vecteurs $\vec{x}$ tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$? Déterminer alors ces vecteurs.

Exercice 3

1) Calculer l'aire du quadrilatère ABCD avec A(2 ;1 ;-2), B(2 ;3 ;0), C(6 ;6 ;5) et D(6 ;4 ;3)
2) Calculer l'aire du triangle ABC avec A(3 ;-2 ;3), B(4 ;0 ;3) et C(6 ;0 ;-3)

Module 18 Limites et continuité d'une fonction

18.1 notion de limite

Exemples introductifs :

Exemple 1

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

x	$-1,5$	$-1,9$	$-1,99$	$-1,999$	$\dots$	-2
$f(x)$	-1	-9	-99	-999		$-\infty$

l'image de -2 n'existe pas (car division par 0)

On constate que plus x est proche de -2 par des valeurs plus grandes
plus $f(x)$ est grande (avec un signe moins)

Notation : $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$

Exemple 2

$\frac{x+1}{x+2}$

x	$-2,5$	$-2,1$	$-2,01$	$-2,001$	$\dots$ -2
$f(x)$	3	11	101	1001	$\dots$ $+\infty$

plus x s'approche de -2 par des valeurs plus petites
plus $f(x)$ est grande

Notation : $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = +\infty$

ou $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$

On note : $\lim\limits_{x \to (-2)^\pm} f(x) = \mp\infty$

<u>Exemple 3</u>

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, dont le domaine de définition est $[0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

Cette fonction n'est donc pas définie pour $x=1$, mais que vaut-elle pour des valeurs de x proches de 1 ?

x	0.5	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.5
$f(x)$	1.71	1.95	1.99	1.999	□	2.001	2.005	2.05	2.33

En observant le tableau ci-dessus, on est tenté de dire que $f(x)$ a pour limite 2 lorsque x tend vers 1 (il faudrait le démontrer), ce que l'on note :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$$

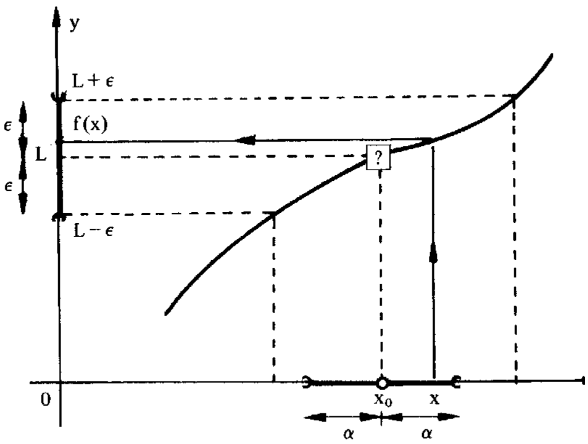
Définition exacte :

On dit que $f(x)$ a pour limite L lorsque x tend vers x_o et on écrit $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=L$, lorsque pour tout nombre positif ε arbitrairement choisi, il existe un nombre α tel que l'inégalité $0<|x-x_o|<\alpha$ implique l'inégalité $|f(x)-L|<\varepsilon$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=L}$ se traduit par $\boxed{\forall\varepsilon>0,\exists\alpha:0<|x-x_o|<\alpha\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon}$

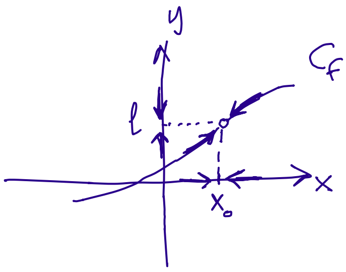
Interprétation graphique :

Quel que soit l'intervalle $]L-\varepsilon;L+\varepsilon[$ de centre L, choisi sur l'axe O_y, on peut trouver un intervalle de centre x_o sur O_x tel que tout nombre x de cet intervalle (sauf peut-être x_o) ait son image $f(x)$ située dans l'intervalle $]L-\varepsilon;L+\varepsilon[$.



Limite à droite et limite à gauche :

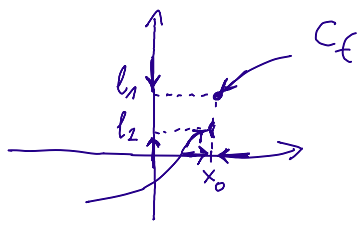
Il y a deux manières pour x de s'approcher de x_o : soit par des valeurs plus grandes que x_o (limite à droite), soit par des valeurs plus petites que x_o (limite à gauche).



Dans ce cas lorsque x s'approche de x_o par la droite ou par la gauche, $f(x)$ s'approche de l et on note :

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = l$$

Il est possible que la limite à droite et la limite à gauche ne soit pas égales, comme dans le cas ci-contre :



$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = l_1$$
$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = l_2$$

Limite finie L lorsque x tend vers l'infini :

On dit que $f(x)$ admet la limite L lorsque x tend vers l'infini pour exprimer que $f(x)$ prend des valeurs d'autant plus proches de L que les valeurs données à x sont grandes. On note :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

exemple : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Limite infinie lorsque x tend vers x_o :

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) lorsque x tend vers x_o pour exprimer que $f(x)$ prend des valeurs positives (ou négatives) d'autant plus grandes que l'on choisit pour x des valeurs plus proches de x_o. On note :

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to x_o} f(x) = -\infty$$

Limite infinie lorsque x tend vers l'infini :

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ pour exprimer que $f(x)$ prend des valeurs positives d'autant plus grandes que l'on choisit pour x des valeurs grandes positives. On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

On définit de manière analogue les égalités :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

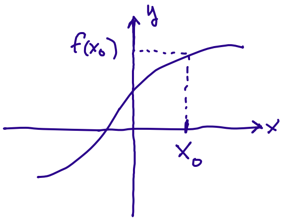
18.2 continuité d'une fonction

Continuité en point :

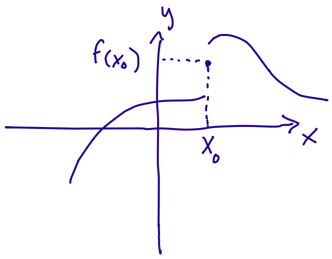
Une fonction $f(x)$ est continue au point d'abscisse x_o si on a les égalités suivantes :

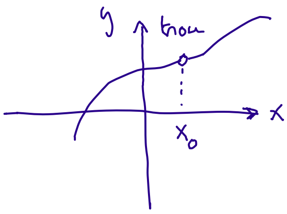
$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = \lim_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o)$$

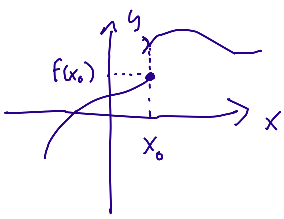
exemples :

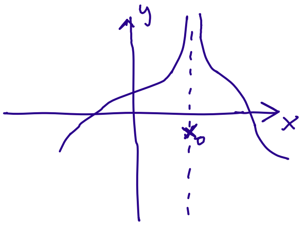


Cette fonction est continue en x_o









Ces fonctions ne sont pas continues en x_o

Continuité d'une fonction :

Une fonction est continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

18.3 opération sur les limites, limites déterminées et indéterminées

limite d'une somme de deux fonctions :

SI	lorsque x tend vers α $f(x)$ tend vers	$g(x)$ tend vers	ALORS	lorsque x tend vers α, la somme $f(x)+g(x)$ tend vers
	A	B		A+B
	A	$+\infty$		$+\infty$
	A	$-\infty$		$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$
	$+\infty$	$-\infty$		FORME INDETERMINEE

limite du produit de deux fonctions

SI	lorsque x tend vers α $f(x)$ tend vers	$g(x)$ tend vers	ALORS	lorsque x tend vers α, le produit $f(x)\cdot g(x)$ tend vers
	A	B		$A\cdot B$
	$A \neq 0$	∞		∞
	∞	∞		∞
	0	∞		FORME INDETERMINEE

limite du quotient de deux fonctions

SI	lorsque x tend vers α $f(x)$ tend vers	$g(x)$ tend vers	ALORS	lorsque x tend vers α, le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers
	A	$B \neq 0$		$\frac{A}{B}$
	$A \neq 0$	0^+ ou 0^-		∞
	∞	0^+ ou 0^-		∞
	A	∞		0
	0	∞		0
	0	0		FORME INDETERMINEE
	∞	∞		FORME INDETERMINEE

limite de l'inverse d'une fonction

SI lorsque x tend vers α $f(x)$ tend vers	ALORS lorsque x tend vers α, l'inverse $\frac{1}{f(x)}$ tend vers
$A \neq 0$	$\frac{1}{A}$
0^+ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
∞	0

limite de la racine carrée d'une fonction

SI lorsque x tend vers α $f(x)$ tend vers	ALORS lorsque x tend vers α, $\sqrt{f(x)}$ tend vers
$A \geq 0$	$\sqrt{A}$
$+\infty$	$+\infty$

Calcul de limites :

pour calculer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = ?$

on remplace x par sa limite et on applique les règles de "l'algèbre de l'infini".

Exemples :

1) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 + 3x = 2^2 + 3 \cdot 2 = \overset{\text{nombre}}{4} + \overset{\text{nombre}}{6} = 10$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5 + x = 5 + \infty = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x+3}{x-2} = "\frac{5}{0^+}" = +\infty$

4) $\lim\limits_{x \to 2} \overset{4}{x^2} \cdot \overset{2}{x} = 4 \cdot 2 = 8$

5) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x+3}{2-x} = "\frac{5}{0^-}" = -\infty$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x^{-1}} = "\frac{+\infty}{0^+}" = +\infty$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

18.4 limités indéterminées

Limite du type $\frac{0}{0}$:

ce genre de limite concerne une fraction s'annulant au numérateur et au dénominateur lorsque x tend vers x_0.

Exemples introductifs :

1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x-6}{x^2-4} = "\frac{0}{0}"$

$\parallel$

$0,75$

Calcul avec $x = 2.0001$

$\frac{3 \cdot 2,0001 - 6}{2,0001^2 - 4} = 0,74998$

Calcul avec $x = 2.000001$

$\frac{3 \cdot 2,000001 - 6}{2,000001^2 - 4} = 0,7499998$

2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x-4}{x^2-2x} = "\frac{0}{0}"$

$\parallel$

1

Calcul avec $x = 2.00001$

$\frac{2 \cdot 2,00001 - 4}{2,00001^2 - 2 \cdot 2,00001} = 0,999995$

On constate que dans le premier exemple la limite du type $\frac{0}{0}$ tend vers 0.75, alors que dans le 2ème exemple, elle tend vers 1.

Méthodes de résolution de limites du type $\frac{0}{0}$:

1°) Limité indéterminées du type $\frac{0}{0}$ pour des fonctions rationnelles

rappel : fonction rationnelle = $\dfrac{\text{polynôme 1}}{\text{polynôme 2}}$

Théorème des polynômes :

un polynôme $p(x)$ s'annulant en $x = a$ est factorisable par $(x-a)$

$\Rightarrow$ si $p(a) = 0$ alors $p(x) = (x-a) \cdot q(x)$

où $q(x)$ est un polynôme dont le degré est inférieur d'une unité par rapport à celui de $p(x)$

ex : soit $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$

1°) calculer $p(2)$

2°) factoriser $p(x)$

1°) $p(2) = 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 - 2 = 24 - 8 - 14 - 2 = 0$

2°) $p(x)$ est factorisable par $x - 2$

3°) on trouve $q(x)$ par division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-2x^2-7x-2 & x-2 \\ \hline -(3x^3-6x^2) & 3x^2+4x+1 \\ \hline 4x^2-7x-2 & \\ -(4x^2-8x) & \\ \hline x-2 & \\ -(x-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow p(x) = (x-2)(3x^2+4x+1)$

application de ce théorème pour résoudre une limite du type $\frac{0}{0}$:

si $\lim\limits_{x \to a} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{0}{0}$

alors $P_1(a) = 0 \overset{Th.}{\Rightarrow} P_1(a) = (x-a) \cdot q_1(x)$

et $P_2(a) = 0 \overset{Th.}{\Rightarrow} P_2(a) = (x-a) \cdot q_2(x)$

donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)} \cdot q_1(x)}{\cancel{(x-a)} \cdot q_2(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{q_1(x)}{q_2(x)}$

ex :

a) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{5x-15} = "\frac{9-9}{15-15}" = "\frac{0}{0}"$ indéterminé

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{5x-15} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)} \cdot (x+3)}{\cancel{(x-3)} \cdot 5} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x+3}{5} = \frac{6}{5}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2x+6}{x^2+8x+15} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(2)}{\cancel{(x+3)}(x+5)} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{2}{x+5} = \frac{2}{-3+5} = \frac{2}{2} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^3+3x^2-4} = \dfrac{"-8+16-8"}{-8+12-4} = \dfrac{"0"}{0}$ indéterminé

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}\cdot(x^2+2x)}{\cancel{(x+2)}\cdot(x^2+x-2)} =$

$$\begin{array}{l|l} x^3+4x^2+4x & x+2 \\ \hline -(x^3+2x^2) & x^2+2x \\ \quad 2x^2+4x & \\ \quad -(2x^2+4x) & \\ \quad\quad 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l} x^3+3x^2-4 & x+2 \\ \hline -(x^3+2x^2) & x^2+x-2 \\ \quad x^2-4 & \\ \quad -(x^2+2x) & \\ \quad\quad -2x-4 & \\ \quad\quad -(-2x-4) & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2} = \dfrac{"4-4"}{4-2-2} = \dfrac{"0"}{0}$

$= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}\cdot x}{\cancel{(x+2)}\cdot(x-1)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$

Exercice 1 : calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{2x^2+x-3}$

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

7) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

9) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-x}{x+2}$

10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$

11) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x+6}{(x+2)^2}$

12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+x^3-2}{x^3+x^2-2}$

2°) Limite indéterminée du type $\frac{0}{0}$ pour des fonctions avec racines :

ex :

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9} = "\frac{\sqrt{9}-3}{9-9}" = "\frac{0}{0}"$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\overbrace{\sqrt{x+6}-3}^{(a-b)}}{x^2-9} \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{x+6}+3}^{(a+b)}}{\sqrt{x+6}+3} \to 1$$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$a-b$ est le conjugué de $a+b$

$a+b$ est le conjugué de $a-b$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\overbrace{(\sqrt{x+6})^2 - 3^2}^{a^2-b^2}}{(x^2-9)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x+6-9}{(x^2-9)(\sqrt{x+6}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3})(x+3)(\sqrt{x+6}+3)} = \frac{1}{6 \cdot (\sqrt{9}+3)} = \frac{1}{6 \cdot (3+3)} = \frac{1}{36}$$

Exercice 2 : calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

5) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x-1}$

7) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

11) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{16+h}-4}{h}$

3°) Limite du type $\frac{0}{0}$ avec des valeurs absolues :

Il faut enlever les valeurs absolues en utilisant la règle ci-dessous, et lever l'indétermination.

$$|X| = \begin{cases} X & \text{si } X > 0 \\ -X & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

Exercice 3 : Calculer les limites à droite et à gauche des fonctions suivantes pour x tendant vers x_0

1) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\qquad x_0 = 0$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{|x|}$ $\qquad x_0 = 0$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{|x|}$ $\qquad x_0 = 0$

4) $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x^2 - 3x + 2}$ $\qquad x_0 = 2$

4°) Limite du type $\frac{0}{0}$ avec la fonction $\sin(x)$:

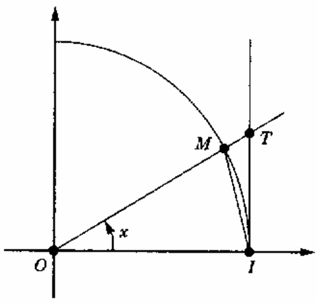
On utilise la règle ci-dessous, qu'il faut prouver dans l'exercice 4 :

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Exercice 4

On considère le cercle de centre O et de rayon 1.
En comparant les aires des triangles OIM et OIT avec celle du secteur circulaire OIM, montrer que

$$\sin(x) \le x \le \tan(x) \text{ si } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$



En déduire que

$$\cos(x) \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1$$

puis montrer que $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Exercice 5 : calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

Limites indéterminées du type "$(+\infty)-(+\infty)$"

Exemples introductifs :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x = (+\infty) - (+\infty) = +\infty$

si $x = 1000$ $x^2 - x = 1'000'000 - 1'000 = 999'000$

$x = 1'000'000$ $x^2 - x = 1'000'000'000'000 - 1'000'000$
$= 999'999'000'000$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - x^2 = (+\infty) - (+\infty) = -\infty$

Pour calculer une limite de ce type, on utilise le théorème :

Théorème : lorsque x tend vers l'infini, la limite d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

négligeable

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 + 5x - 8 = \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 = "-3\cdot(+\infty)^2" = -\infty$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 + 5x^3 - 8 = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^3 = "5\cdot(+\infty)^3" = +\infty$

négligeable

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 \underbrace{-x+8}_{+\infty} = \text{"}+\infty - (+\infty) + 8\text{"}$ indéterminé

négligeable

$3x^2 \to +\infty$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = \text{"}3 \cdot (+\infty)^2\text{"} = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$

Plus rigoureusement :

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - x + 8 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(3 - \frac{1}{x} + \frac{8}{x^2}\right)$

$\frac{1}{+\infty} = 0$ $\quad \frac{8}{+\infty} = 0$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^2(3 - 0 + 0) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = 3 \cdot (+\infty)^2 = +\infty$

Limites indéterminées du type $\frac{\infty}{\infty}$:

1°) Limites du type $\frac{\infty}{\infty}$ avec des fonctions rationnelles :

Lorsque la variable x tend vers l'infini, une fonction rationnelle admet la même limite que le quotient de ses termes de plus haut degré.

- Si le degré du numérateur est plus grand que le degré du dénominateur, cette limite est l'infini.
- Si le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, cette limite est égale au rapport des coefficients des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
- Si le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur, cette limite est 0.

Exemples :

1) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{2x^2+3x-5}}{\underset{\searrow +\infty}{4x^3-7}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{4x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{4x} = \text{"}\frac{2}{+\infty}\text{"} = 0^+$

2) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{2x^2+3x-5}}{\underset{\searrow -\infty}{4x-7}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = \text{"}\frac{+\infty}{2}\text{"} = +\infty$

3) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty}{2x^2+3x-5}}{\underset{\searrow +\infty}{4x^2-7}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Exercice 6 : calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes

1)	$f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x}$	2)	$f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^3+1}$
3)	$f(x) = \dfrac{3x^2-2x+2}{x+1}$	4)	$f(x) = \dfrac{2x^2+2x-15}{3x^2+8x+15}$
5)	$f(x) = \dfrac{2x^2+2x-15}{(x+3)^2}$	6)	$f(x) = \dfrac{-3x+2}{4x+4}$
7)	$f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^3}$	8)	$f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

2°) Limites du type $\frac{\infty}{\infty}$ avec des fonctions logarithmiques ou exponentielles :

$e = 2{,}71828\ldots$

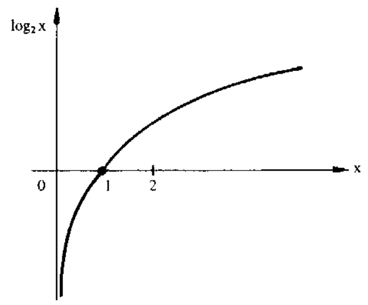
4) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to e^{+\infty} = +\infty \text{ (rapide)}}{e^x}}{\underset{\searrow +\infty \text{ (lent)}}{x}} = +\infty$

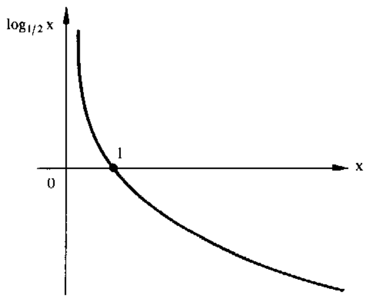
5) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty \text{ (lent)}}{x}}{\underset{\searrow +\infty \text{ (rapide)}}{e^x}} = 0^+$

6) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{\to +\infty \text{ (lent)}}{\ln x}}{\underset{\searrow +\infty \text{ (rapide)}}{x}} = 0^+$

On peut expliquer ces résultats en considérant les courbes représentant les fonctions $log_a(x)$ et a^x :

Limites de fonctions logarithmes :





Les graphiques ci-dessus illustrent les limites suivantes :

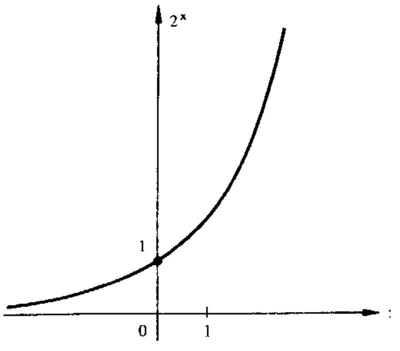
si a > 1 on a : $\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty\end{array}}$, en particulier : $\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty\end{array}}$

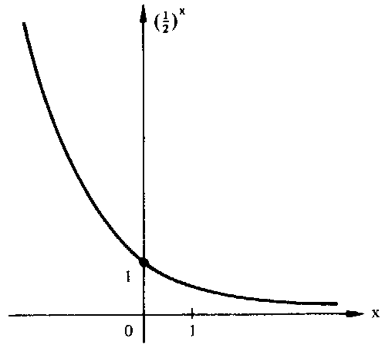
si 0 < a < 1 on a : $\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty\end{array}}$

Voici encore d'autres limites concernant les logarithmes

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^p}{x^q} = 0^+, q > 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0^- \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x^p \cdot (\ln x)^q = 0, p > 0\end{array}}$$

Limites de fonctions exponentielles :





Les graphiques ci-dessus illustrent les limites suivantes :

si a > 1 on a : $\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0^+ \end{array}}$, en particulier : $\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \end{array}}$

si 0 < a < 1 on a : $\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty \end{array}}$

Voici encore d'autres limites concernant les exponentielles :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^q} = +\infty, a > 1, q > 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot e^x = 0^- \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^q \cdot a^x = 0^-, a > 1, q > 0 \end{array}}$$

On remarquera encore le résultat suivant :

$$\boxed{e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.71828...}$$

Exercice 7 : calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x+2}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x+2}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 8}{e^{2x}}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 8}{e^{2x}}$

5) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x+5}$

6) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{\ln x}$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{\ln x}$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2 + 3x - 4}$

Module 19 Asymptotes

« La science est l'asymptote de la vérité. Elle approche sans cesse et ne touche jamais. »
Victor Hugo

Une asymptote est une droite telle que la distance d'un point d'une courbe à cette droite tend vers zéro lorsque le point s'éloigne sur la courbe à l'infini.

19.1 Asymptotes verticales

Si $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \infty}$ alors la droite $\boxed{x = a}$ est une asymptote verticale de la fonction f.

a est forcément une borne finie non incluse dans le domaine de définition de la fonction f.

Pour déterminer la position de la fonction par rapport à une asymptote verticale d'équation $x = a$, il faut préciser la façon dont x s'approche de a (par la droite ou par la gauche) est calculer si la limite est égale à + ou – l'infini.

Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ cela signifie que si on imagine des points de la courbe de f dont la 1ère coordonnée est de plus en plus proche de a, tout en étant supérieure à a, alors la 2ème coordonnée de ces points est de plus en plus grande et tend vers $+\infty$.

On peut résumer ceci en notant :

$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow$ la courbe de f tend vers le point $(a^+; +\infty)$

Ce point est inatteignable, mais on placera, pour le symboliser, un point juste à droite de l'asymptote verticale au niveau de sa première coordonnée et le plus haut possible dans le graphique, au niveau de sa deuxième coordonnée. La courbe de la fonction f devra tendre vers ce point.

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

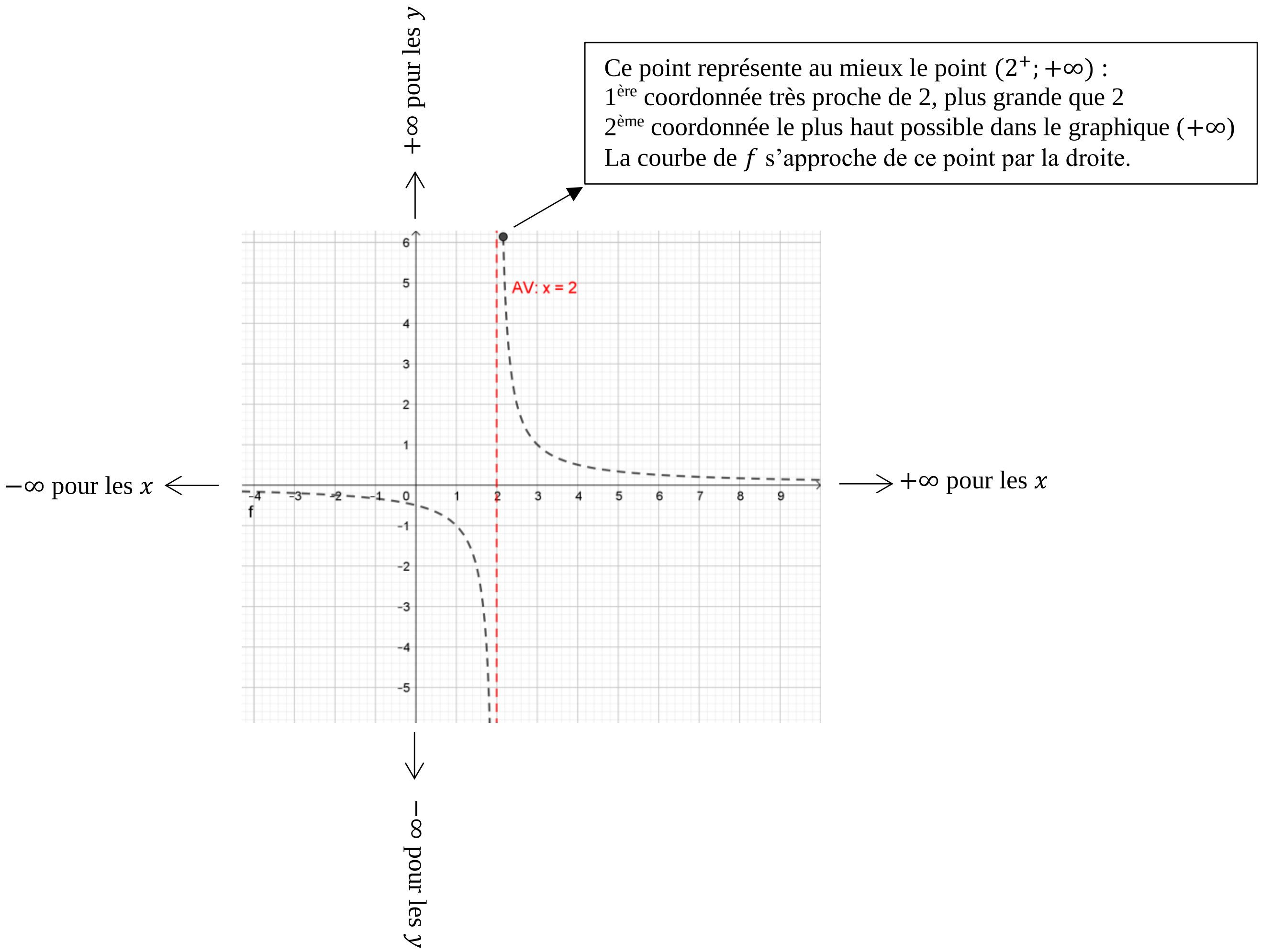
Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

2 est une borne finie non incluse dans le domaine de définition. On peut imaginer des valeurs de x proches de 2, soit plus grandes que 2, soit plus petites que 2.

1°) x s'approche de 2 par des valeurs plus grandes que 2 :

On calcule : $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
Donc la courbe de f (C_f) tend vers le point $(2^+; +\infty)$.

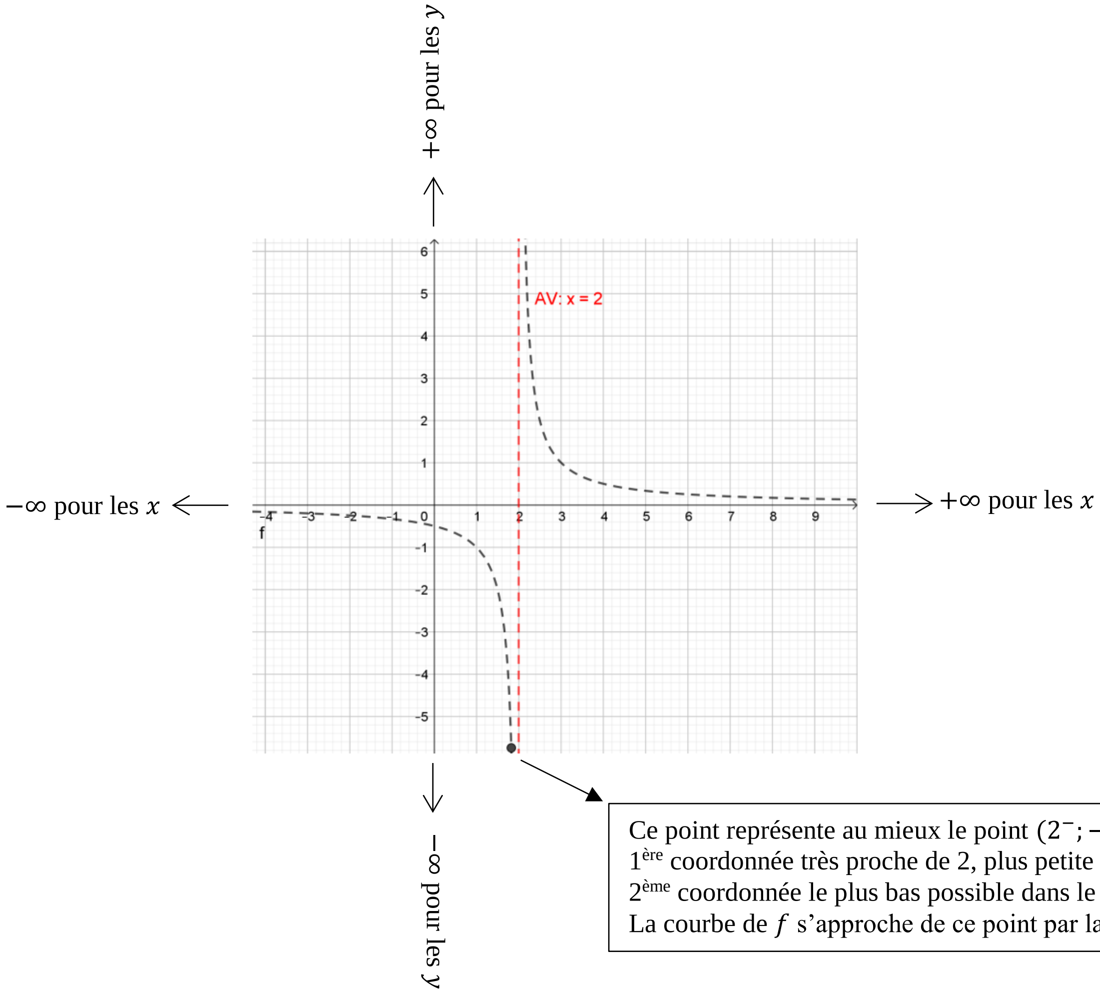
Représentation graphique :



2°) x s'approche de 2 par des valeurs plus petites que 2 :

On calcule : $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
Donc la courbe de f tend vers le point $(2^-; -\infty)$.

Représentation graphique :

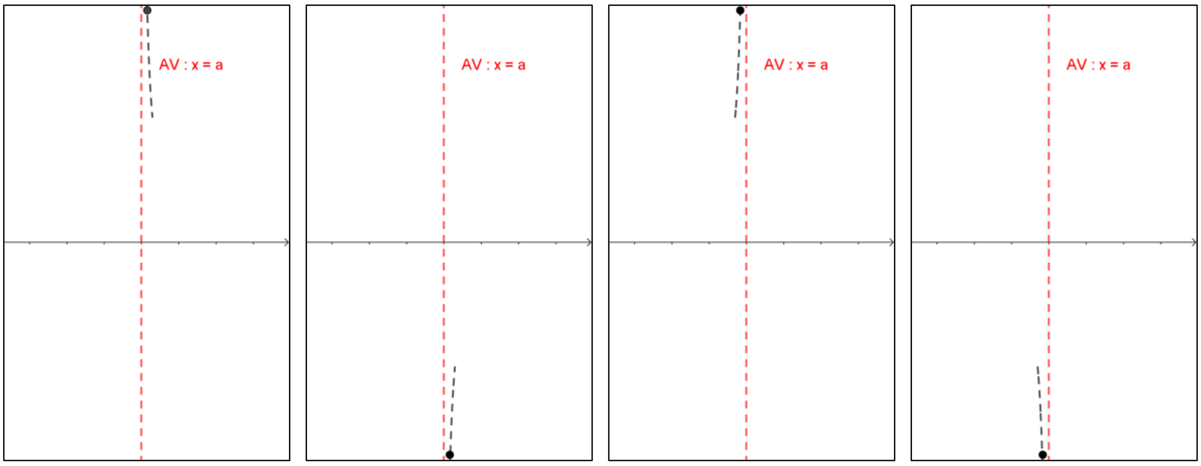


Ce point représente au mieux le point $(2^-; -\infty)$:
1ère coordonnée très proche de 2, plus petite que 2
2ème coordonnée le plus bas possible dans le graphique $(-\infty)$
La courbe de f s'approche de ce point par la gauche.

Les cas ci-dessous sont envisageables :

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
C_f tend vers le point $(a^+ ; +\infty)$ par la droite

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
C_f tend vers le point $(a^- ; +\infty)$ par la gauche



$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
C_f tend vers le point $(a^+ ; -\infty)$ par la droite

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
C_f tend vers le point $(a^- ; -\infty)$ par la gauche

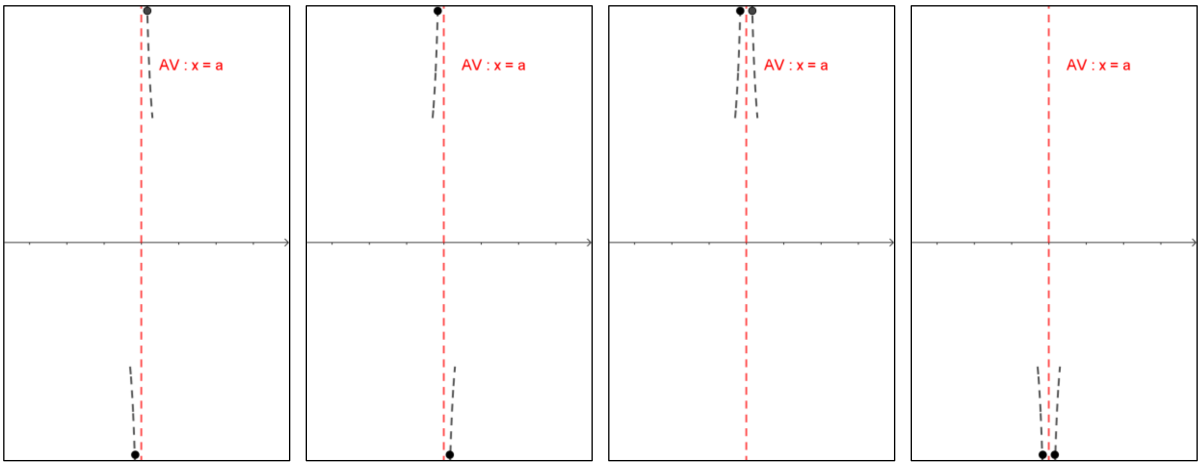
Ces cas peuvent éventuellement se combiner :

$\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$
C_f tend vers les points $(a^+ ; +\infty)$ par la droite et $(a^- ; -\infty)$ par la gauche

$\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \mp\infty$
C_f tend vers le point $(a^+ ; -\infty)$ par la droite et $(a^- ; +\infty)$ par la gauche

$\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = +\infty$
C_f tend vers le point $(a^+ ; +\infty)$ par la droite et $(a^- ; +\infty)$ par la gauche

$\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = -\infty$
C_f tend vers le point $(a^+ ; -\infty)$ par la droite et $(a^- ; -\infty)$ par la gauche



19.2 Asymptotes horizontales

Soit b un nombre réel.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ alors la droite $y = a$ est une asymptote horizontale de la fonction f.

Pour déterminer la position de la fonction par rapport à une asymptote horitzontale d'équation $y = a$, il faut préciser la façon dont x s'approche de l'infini.
x peut tendre vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a^+$ cela signifie que si on imagine des points de la courbe de f dont la 1ère coordonnée est de plus grande, alors la 2ème coordonnée de ces points est de plus en plus proche de a, tout en étant plus grande que a.

On peut résumer ceci en notant :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a^+ \quad \Rightarrow$ la courbe de f tend vers le point $(+\infty; a^+)$

Ce point est inatteignable, mais on placera, pour le symboliser, un point juste en-dessus de l'asymptote horizontale au niveau de sa deuxième coordonnée et le plus à droite possible dans le graphique, au niveau de sa première coordonnée. La courbe de la fonction f devra tendre vers ce point.

Exemple :

Soit la fonction $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
x peut donc tendre vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

1°) x tend vers $+\infty$:

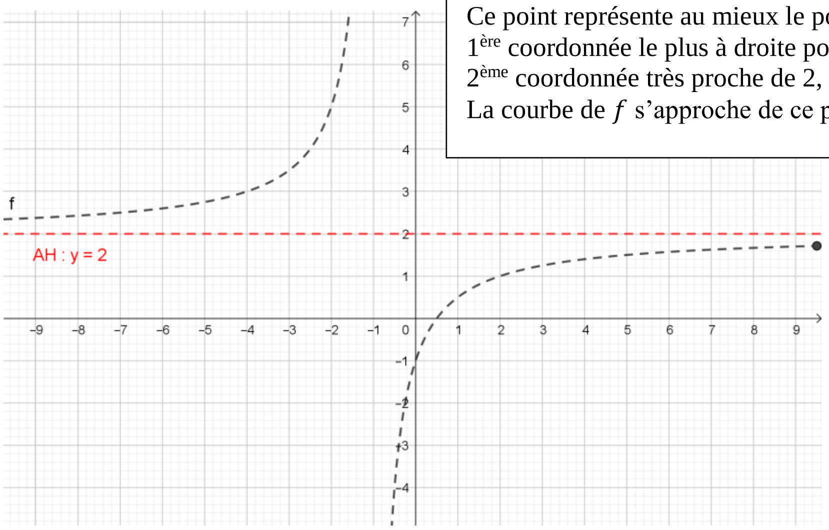
On calcule : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2^-$

On trouve que la limite est un peu plus petite que 2 en remplaçant x par un grand nombre comme 1000 : on obtient $\frac{1999}{1001} \cong 1.997$, résultat proche de 2 mais inférieur à 2.

Donc C_f tend vers le point $(+\infty; 2^-)$.

Représentation graphique :

$+\infty$ pour les y



Ce point représente au mieux le point $(+\infty; 2^-)$:
1ère coordonnée le plus à droite possible dans le graphique $(+\infty)$
2ème coordonnée très proche de 2, plus petite que 2
La courbe de f s'approche de ce point par-dessous l'AH.

$-\infty$ pour les x

$+\infty$ pour les x

$-\infty$ pour les y

2°) x tend vers -∞ :

On calcule : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2^+$

On trouve que la limite est un peu plus grande que 2 en remplaçant x par -1000 :
on obtient $\frac{-2001}{-999} \cong 2.003$, résultat proche de 2 mais supérieur à 2.

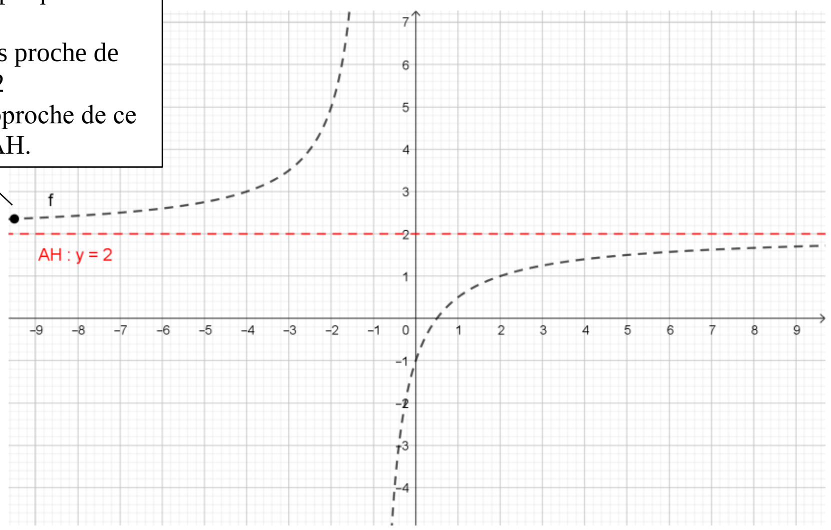
Donc C_f tend vers le point $(-\infty; 2^+)$.

Représentation graphique :

$+\infty$ pour les y

Ce point représente au mieux le point $(-\infty; 2^+)$:
1ère coordonnée le plus à gauche possible dans le graphique $(-\infty)$
2ème coordonnée très proche de 2, plus grande que 2
La courbe de f s'approche de ce point par-dessus l'AH.

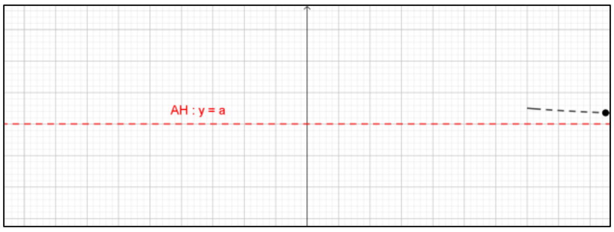
$-\infty$ pour les x



$+\infty$ pour les x

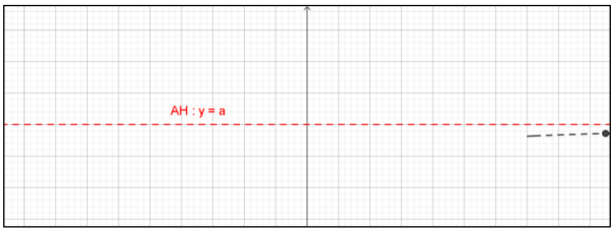
$-\infty$ pour les y

Les cas ci-dessous sont envisageables :



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a^+$

C_f tend vers le point $(+\infty; a^+)$ et s'approche de l'AH à droite par-dessus.

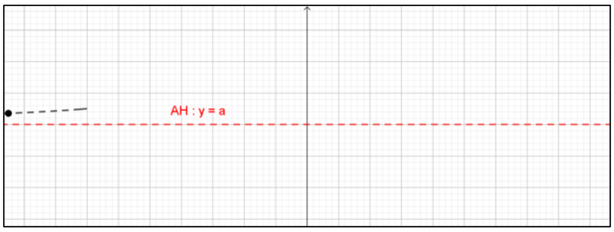


$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a^-$

C_f tend vers le point $(+\infty; a^-)$ et s'approche de l'AH à droite par-dessous.

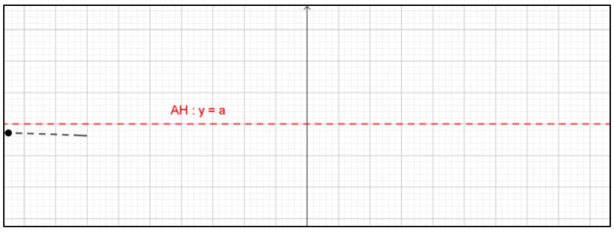
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a^+$

C_f tend vers le point $(-\infty; a^+)$ et s'approche de l'AH à gauche par-dessus.



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a^-$

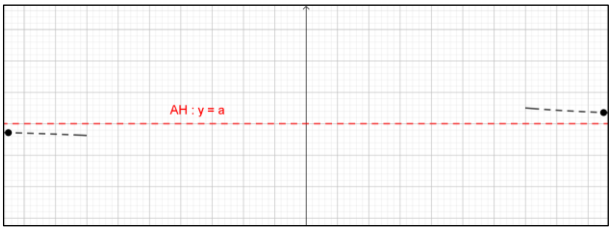
C_f tend vers le point $(-\infty; a^-)$ et s'approche de l'AH à gauche par-dessous.



Ces cas peuvent éventuellement se combiner :

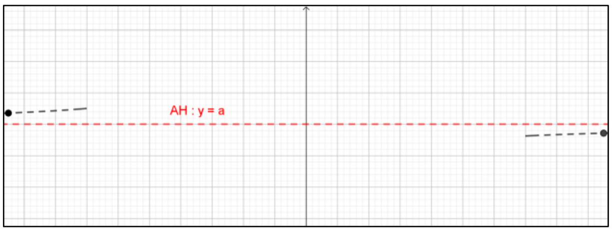
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a^\pm$

C_f tend vers les points $(+\infty; a^+)$ et $(-\infty; a^-)$ et s'approche de l'AH à droite par-dessus et gauche par-dessous.



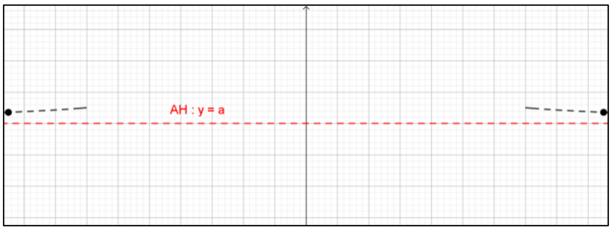
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a^\mp$

C_f tend vers les points $(+\infty; a^-)$ et $(-\infty; a^+)$ et s'approche de l'AH à droite par-dessous et gauche par-dessus.



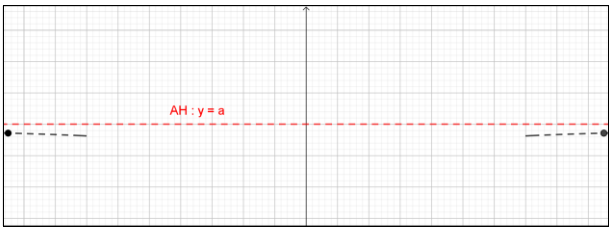
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a^+$$

C_f tend vers les points $(+\infty; a^+)$ et $(-\infty; a^+)$ et s'approche de l'AH à droite et à gauche par-dessus.



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a^-$$

C_f tend vers les points $(+\infty; a^-)$ et $(-\infty; a^-)$ et s'approche de l'AH à droite et gauche par-dessous.



Remarques :

- Les fonctions rationnelles possèdent une asymptote horizontale si les degrés du numérateur et du dénominateur sont égaux.
- Si le degré du dénominateur est plus grand que celui du numérateur, la fonction possède une asymptote horizontale en y = 0.

Exemples :

1) La fonction $f(x) = \frac{2x^2+5x-1}{3x^2-x+7}$ possède une AH en $y = \frac{2}{3}$ car

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2+5x-1}{3x^2-x+7} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

2) La fonction $f(x) = \frac{7x+1}{4x^2-5x+2}$ possède une AH en $y = 0$ car

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{7x+1}{4x^2-5x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{7x}{4x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{7}{4x} = \frac{7}{\pm\infty} = 0^{\pm}$$

3) La fonction $f(x) = \frac{3x^2-2x+4}{-2x+7}$ ne possède pas d'AH car

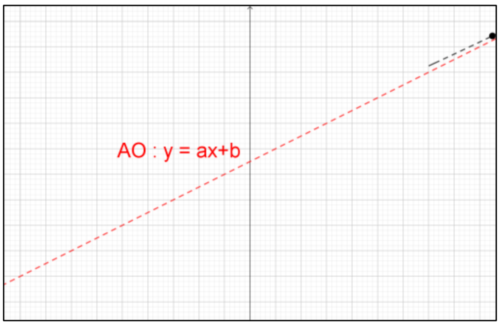
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2-2x+4}{-2x+7} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{-2} = \frac{\pm\infty}{-2} = \mp\infty$$

19.3 Asymptotes obliques (affines)

La droite $y = ax + b$ est une asymptote oblique ou affine de la fonction f si on a :

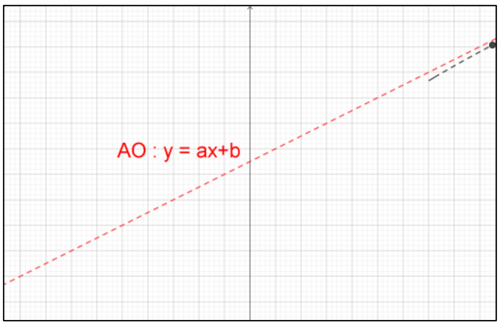
$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Dans ce cas le graphe de la fonction s'approche de plus en plus d'une droite oblique lorsque x tend vers plus ou moins l'infini. Les cas ci-dessous sont envisageables :



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0^+$$

C_f tend vers un point situé le plus à droite possible et juste en-dessus de l'AO.

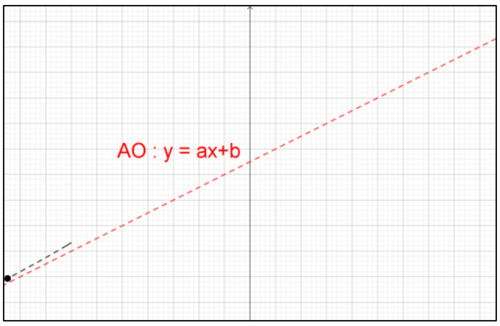


$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0^-$$

C_f tend vers un point situé le plus à droite possible et juste en-dessous de l'AO.

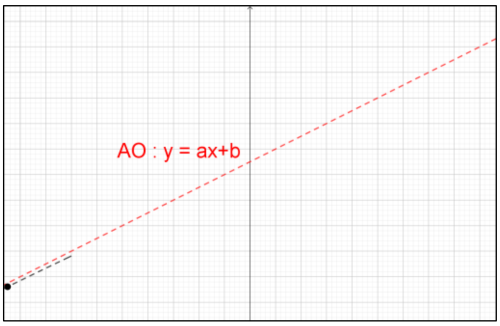
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0^+$$

C_f tend vers un point situé le plus à gauche possible et juste en-dessus de l'AO.



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0^-$$

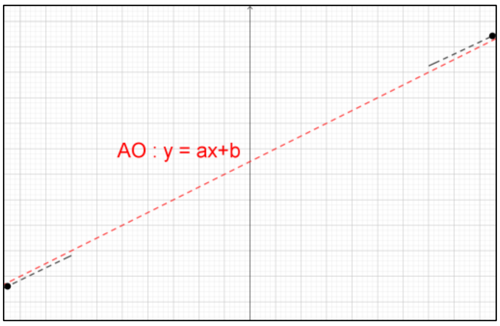
C_f tend vers un point situé le plus à gauche possible et juste en-dessous de l'AO.



Ces cas peuvent éventuellement se combiner :

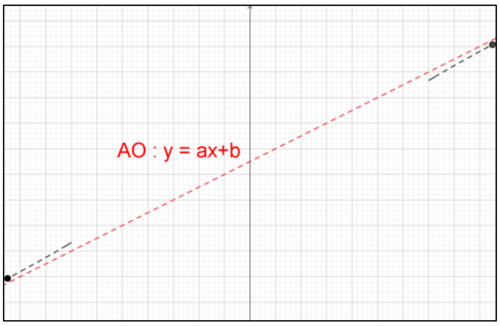
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0^{\pm}$$

C_f tend à droite vers un point situé le plus à droite possible et juste en-dessus de l'AO, et à gauche vers un point situé le plus à gauche possible et juste en-dessous de l'AO.



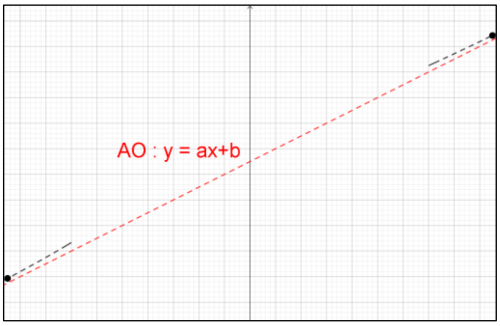
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0^{\mp}$$

C_f tend à droite vers un point situé le plus à droite possible et juste en-dessous de l'AO, et à gauche vers un point situé le plus à gauche possible et juste en-dessus de l'AO.



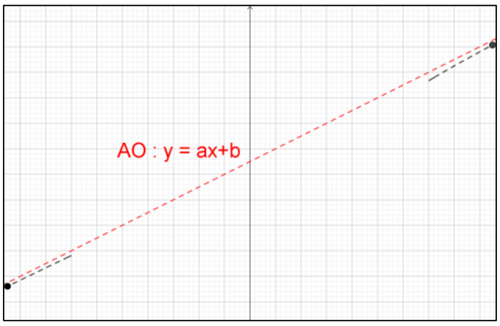
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0^{+}$$

C_f tend à droite vers un point situé le plus à droite possible et juste en-dessus de l'AO, et à gauche vers un point situé le plus à gauche possible et juste en-dessus de l'AO.



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0^{-}$$

C_f tend à droite vers un point situé le plus à droite possible et juste en-dessous de l'AO, et à gauche vers un point situé le plus à gauche possible et juste en-dessous de l'AO.



Ceci se produit si les limites suivantes (qui nous donnent les valeurs de a et de b) appartiennent à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - ax \right)$

En effet :

Il y a une A.O. si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - (ax+b) = 0$

$\Rightarrow$ si $x \to \infty$ alors $f(x) \cong ax+b$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} \cong \frac{ax+b}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} \cong \frac{ax}{x} + \frac{b}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} \cong a + \frac{b}{x} \qquad \frac{b}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow a \cong \frac{f(x)}{x} \Rightarrow a = \underbrace{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}}_{\text{il faut trouver un nombre}}$$

on a $f(x) \cong ax+b$

$$f(x) - ax \cong b \Rightarrow b = \underbrace{\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - ax \right)}_{\text{il faut trouver un nombre}}$$

Recherche de l'AO par division euclidienne :

(uniquement pour les fonctions rationnelles)

Si f est une fonction rationnelle telle que le degré du numérateur est d'une unité plus grand que celui du dénominateur alors f possède obligatoirement une asymptote oblique. Celle-ci peut être déterminée en effectuant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur, le résultat de la division étant $ax+b$:

Fonction rationnelle : $f(x) = \dfrac{polynôme\ 1}{polynôme\ 2}$

Division euclidienne :

$$\begin{array}{c|c} polynôme\ 1 & polynôme\ 2 \\ \vdots & \overline{\ Q(x)\ } \\ \overline{\ R(x)\ } & \end{array}$$

AO en $y = Q(x)$

Quotient de la division = polynôme de degré 1

Reste de la division

Explication :

$$\Rightarrow \frac{polynôme\ 1}{polynôme\ 2} = Q(x) + \frac{R(x)}{polynôme\ 2}$$

Petit degré

Grand degré

$$= \frac{\infty\ (petit)}{\infty\ (grand)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{polynôme\ 1}{polynôme\ 2} = Q(x)$$

Polynôme de degré 1 $(= ax + b)$

C'est l'AO :

$y = Q(x) = ax + b$

Exemple : Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2+4x+2}{-2x+2}$

Cette fonction (rationnelle) possède une AO car le degré du numérateur est d'une unité plus grand que celui du dénominateur.

1°) Recherche de l'AO en utilisant les formules :

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(\frac{x^2+4x+2}{-2x+2}\right)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2+4x+2}{-2x+2} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+4x+2}{-2x^2+2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{-2x^2} = \frac{-1}{2}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - ax\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2+4x+2}{-2x+2} - \left(\frac{-1}{2}\right)x\right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+4x+2+x(-x+1)}{-2x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+4x+2-x^2+x}{-2x+2}$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x+2}{-2x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x}{-2x} = \frac{-5}{2}$$

$$\Rightarrow \text{A.O. en } y = \frac{-1}{2}x - \frac{5}{2}$$

2°) Recherche de l'AO par division euclidienne (uniquement possible pour une fonction rationnelle) :

Division euclidienne :

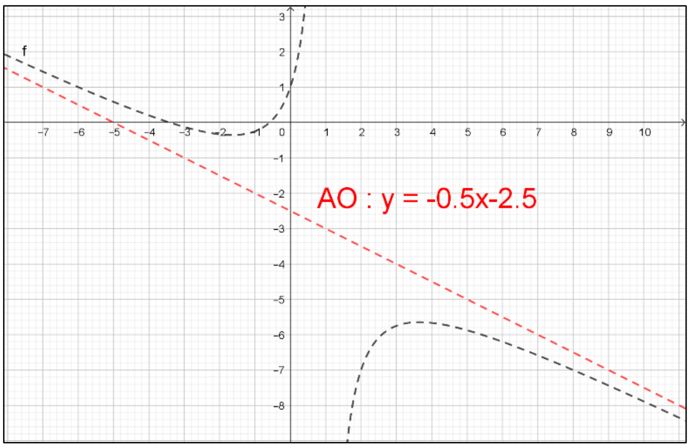
$$\begin{array}{r|l} x^2+4x+2 & -2x+2 \\ \hline -(x^2-x) & -\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \\ \hline 5x+2 & \\ -(5x-5) & \\ \hline 7 & \end{array}$$

AO en $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

Quotient de la division = polynôme de degré 1

Reste de la division

3°) Représentation graphique :



Exercice 1 : déterminer les asymptotes des fonctions suivantes

1) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+8}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x-2}$

6) $f(x) = \dfrac{3x^2+x-4}{(x+1)^2}$

7) $f(x) = 2x+1+\dfrac{3}{x}$

8) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x-1}$

9) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

10) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$

Exercice 2

Trouver, dans chacun des cas suivants, une fonction rationnelle avec

1) une asymptote oblique d'équation $y = 3x-5$;

2) une asymptote horizontale d'équation $y = -2$;

3) une asymptote verticale d'équation $x = 7$;

4) une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et des asymptotes verticales d'équations $x = 3$ et $x = -10$;

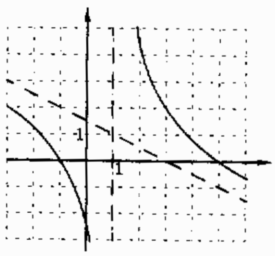
5) une asymptote verticale d'équation $x = 5$ et une asymptote oblique d'équation $y = -2x+5$.

Exercice 3

Déterminer les coefficients réels a, b, c et d de la fonction rationnelle f donnée par $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ dont le graphe passe par le point $A(2\,;-2)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -3$ et $y = -2x+1$.

Exercice 4

Trouver l'expression d'une fonction rationnelle f dont le graphe a la même allure que celui représenté sur le dessin ci-contre.



Exercice 5

Trouver une fonction rationnelle f dont le graphe passe par le point $A(-5\,;20)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -2$, $x = 1$ et $y = 3x - 7$.

Exercice 6

Trouver une fonction rationnelle dont le graphe passe par le point $A(3\,;-2)$ et qui admet pour asymptotes les droites d'équations $15x - 5y - 12 = 0$ et $x = 4$.
Choisir la solution la plus simple pour cette fonction, c'est-à-dire celle pour laquelle les degrés du numérateur et du dénominateur sont les plus petits possibles. Exprimer le résultat sous la forme d'une seule fraction.

Exercice 7

De l'eau salée contenant 5 grammes de sel par litre s'écoule à raison de 10 litres par heure dans une grande cuve contenant initialement 10 litres d'eau pure.

1) Calculer le volume total d'eau et la quantité de sel de la cuve au bout de t heures.

2) Quelle est la concentration en sel après une longue période de temps ?

Module 20 Dérivée d'une fonction (partie 1)

But : déterminer un "outil mathématique" permettant de préciser les intervalles sur lesquels une fonction f donnée est croissante, décroissante ou stationnaire.

Rappels :

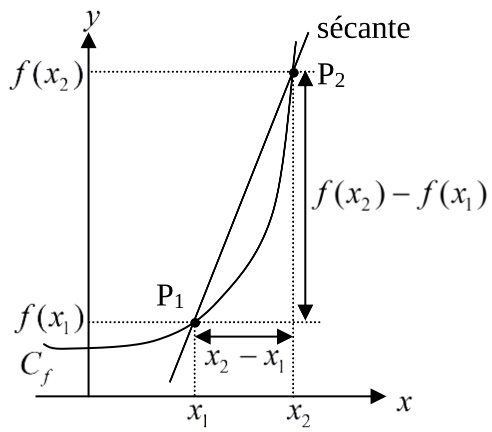
Croissance d’une fonction

Une fonction f est croissante sur un intervalle I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x \in I$
Une fonction f est décroissante sur un intervalle I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $\forall x \in I$
Une fonction f est stationnaire sur un intervalle I si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, $\forall x \in I$

Taux d’accroissement d’une fonction

Le taux d’accroissement d’une fonction f entre deux points d’abscisses x_1 et x_2 est donnée par :

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Le taux d’accroissement correspond à la pente de la sécante à la fonction f passant par les points P_1 $(x_1; f(x_1))$ et $P_2(x_2; f(x_2))$.

(C_f =courbe représentative de la fonction f)

Le taux d’accroissement nous indique la croissance moyenne de la fonction f entre les points P_1 et P_2 , ce qui ne nous donne pas d’information précise quant à la croissance de la fonction.

20.1 dérivée en en point

Pour remédier à cette imprécision, il faut considérer un point P_2 aussi proche que possible de P_1. Plus P_2 s’approche de P_1 , plus la sécante s’approche de la tangente à C_f au point P_1.
Si de plus on change de notation en posant :

$x_0 = x_1$ et $x_0 + h = x_2$, avec h correspondant à l’écart horizontal entre x_1 et x_2, on obtient un taux d’accroissement fonction de x_0 et h donné par :

$$T(x_0;h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Lorsque P_2 s’approche de P_1 , h s’approche de 0. A la limite on a :

$$\lim_{P_2 \to P_1} T(x_0;h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Cette limite nous donne la pente de la tangente. On en tire la définition suivante :

Une fonction f est **dérivable** en x_0 si $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe dans $\mathbb{R}$.

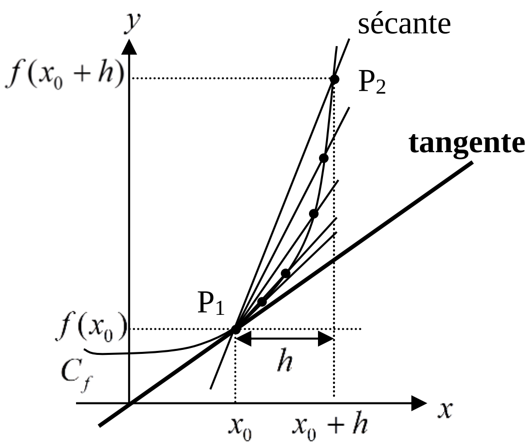
Ce nombre réel, noté $f'(x_0)$, est appelé **nombre dérivé** de f en x_0

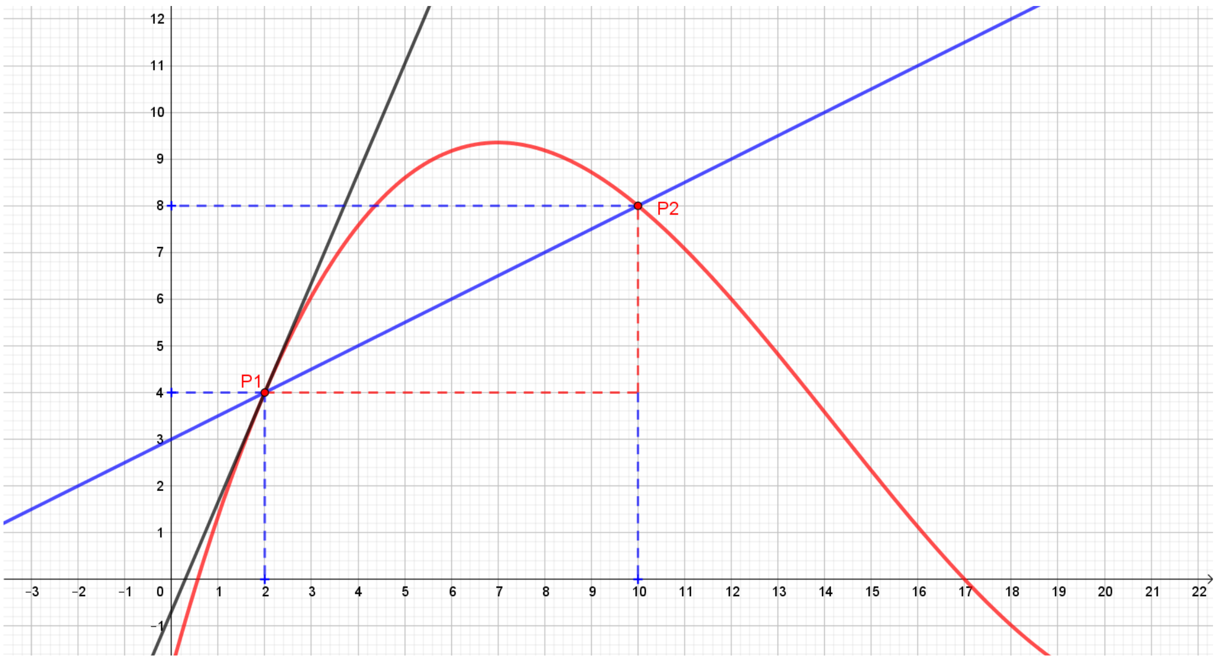
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

20.2 interprétation graphique

D'après ce qui a été indiqué ci-dessus, et le graphique ci-contre, on observe que

$f'(x_0)$ est la pente de la tangente à C_f au point $(x_0; f(x_0))$





20.3 dérivée sur un intervalle

Une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si elle est dérivable en tout point de I. On définit la **fonction dérivée** de f par

$$\boxed{\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}}$$

f' est donc une **fonction** nous permettant de calculer la pente de la tangente à la fonction f en un point d'abscisse x.

20.4 équation de la tangente à une fonction en un point

Quelle est l'équation de la tangente à f au point $(x_0 ; f(x_0))$?
Cette tangente est une droite, donc son équation est du type $y = ax + b$.
a est la pente de la droite, donc $a = f'(x_0)$.
Le point $(x_0 ; f(x_0))$ appartient à la droite donc
$f(x_0) = ax_0 + b$
$b = f(x_0) - ax_0$
$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$

On obtient finalement que l'équation de la tangente est :

$\boxed{y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0}$ ou $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

Module 21 Dérivée d'une fonction (partie 2)

21.1 règles de dérivation

21.1.1 dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient

<u>dérivée d'une somme de deux fonctions</u>

Soit f et g deux fonctions dérivables, la dérivée de la somme de ces deux fonctions est :

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned}
$$

Ce qu'on résume par : $\boxed{(f+g)' = f'+g'}$

<u>dérivée de la multiplication d'une fonction par un réel λ</u>

$$
\begin{aligned}
(\lambda f)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(\lambda f)(x+h)-(\lambda f)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\lambda f(x+h)-\lambda f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\lambda(f(x+h)-f(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\lambda\cdot\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\\
&= \lambda\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\\
&= \lambda\cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

Ce qu'on résume par : $\boxed{(\lambda f)' = \lambda f'}$

<u>dérivée d'un produit de deux fonctions</u>

Soit f et g deux fonctions dérivables, la dérivée du produit de ces deux fonctions est :

$$(f\cdot g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - \mathbf{f(x+h)\cdot g(x)} + \mathbf{f(x+h)\cdot g(x)} - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)(g(x+h)-g(x))+g(x)(f(x+h)-f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)(g(x+h)-g(x))}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x)(f(x+h)-f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$$

$$= f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

Ce qu'on résume par : $\boxed{(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'}$

<u>dérivée de l'inverse d'une fonction</u>

$$(\frac{1}{f})'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(\frac{1}{f})(x+h)-(\frac{1}{f})(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(x+h)}-\frac{1}{f(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)\cdot f(x)}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x+h)\cdot f(x)}\cdot\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{f(x+h)\cdot f(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\frac{-1}{f(x+h)\cdot f(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{-1}{f(x+h)\cdot f(x)}$$

$$= f'(x)\cdot\frac{-1}{f(x)\cdot f(x)}$$

$$= \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

Ce qu'on résume par : $\boxed{(\frac{1}{f})' = \frac{-f'}{f^2}}$

dérivée du quotient de deux fonctions

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$$
$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$
$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Ce qu'on résume par : $\boxed{(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$

21.1.2 dérivée des fonctions de base

dérivée de la fonction constante : $f(x) = k$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

dérivée de la fonction identité : $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

dérivée de la fonction affine (droite) : $f(x) = ax+b$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{ax+ah+b-ax-b}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = a$$

dérivée de la fonction parabolique : $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

dérivée de la fonction : $f(x) = \sin(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \lim_{\frac{h}{2} \to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \cdot 1$$

$$= \cos x$$

On obtient en résumé les dérivées suivantes (plus quelques autres) :

$$(k)' = 0$$
$$(x)' = 1$$
$$(ax+b)' = a$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$
$$(x^2)' = 2x$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

21.1.3 dérivée d'une composée de deux fonctions

$$
\begin{aligned}
(f\circ g)'(x) &= (f(g(x)))' \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+H)-f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+H)-f(g(x))}{H}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{H\to 0}\frac{f(g(x)+H)-f(g(x))}{H}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{H\to 0}\frac{f(z+H)-f(z)}{H}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(z)\cdot g'(x) \\
&= f'(g(x))\cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Ce qu'on résume par : $\boxed{(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'}$

Cette formule signifie que pour dériver 2 fonctions composées $f\circ g$, il faut appliquer la fonction f' à la fonction g et multiplier le tout par g'. On donne le nom de dérivée interne à g'.
Si on sait que la dérivée de $f(x)$ est $f'(x)$ et que l'on cherche la dérivée de $f(g(x))$ la formule ci-dessus indique qu'il suffit de remplacer x par $g(x)$ dans f' et de multiplier cette expression par $g'(x)$ qui est la dérivée interne. Si on applique ceci aux dérivées des fonctions de base on obtient le tableau suivant, qui nous facilite grandement le calcul de dérivée de fonctions composées :

$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$	$\longrightarrow$	$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-1}{g^2(x)}\cdot g'(x)$
$(x^2)' = 2x$	$\longrightarrow$	$([g(x)]^2)' = (g^2(x))' = 2g(x)\cdot g'(x)$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\longrightarrow$	$([g(x)]^n)' = (g^n(x))' = ng^{n-1}(x)\cdot g'(x)$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\longrightarrow$	$\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\cdot g'(x)$
$(e^x)' = e^x$	$\longrightarrow$	$(e^{g(x)})' = e^{g(x)}\cdot g'(x)$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$	$\longrightarrow$	$(\ln\lvert g(x)\rvert)' = \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)$
$(\sin x)' = \cos x$	$\longrightarrow$	$(\sin g(x))' = \cos g(x)\cdot g'(x)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\longrightarrow$	$(\cos g(x))' = -\sin g(x)\cdot g'(x)$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\longrightarrow$	$(\tan g(x))' = \frac{1}{\cos^2 g(x)}\cdot g'(x) = (1+\tan^2 g(x))\cdot g'(x)$

21.1.4 dérivée de la réciproque d'une fonction

$$(f \circ {}^r f)(x) = x$$

$$\Rightarrow \quad (f \circ {}^r f)'(x) = (x)'$$

$$\Rightarrow \quad (f' \circ {}^r f)(x) \cdot {}^r f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \quad {}^r f'(x) = \frac{1}{(f' \circ {}^r f)(x)}$$

$$\Rightarrow \quad {}^r f'(x) = \frac{1}{(f'({}^r f(x))}$$

21.2 dérivée première et variation d'une fonction

Comme la fonction dérivée indique la pente de la tangente à $f(x)$ en un point dont la première coordonnée est x, l'étude du signe de $f'(x)$ nous permet de déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est croissante, décroissante ou stationnaire : c'est l'étude des variations de la fonction. On a :

$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ □
$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ □
$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ *extremum*

L'extremum peut être un maximum, un minimum ou un point d'inflexion à tangente horizontale.

21.3 dérivée seconde et concavité d'une fonction

La dérivée seconde est la dérivée de la dérivée (première) de la fonction f, on la note f''. f'' indique la croissance de f' (donc de la pente). L'étude du signe de f'' nous indique donc la concavité de la fonction f :

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ la courbe représentant f est convexe (en forme de $\cup$) sur l'intervalle concerné
$f''(x) < 0 \Rightarrow$ la courbe représentant f est concave (en forme de $\cap$) sur l'intervalle concerné
$f''(x) = 0 \Rightarrow$ le point concerné est un point d'inflexion (changement de concavité)

Module 22 Etude d'une fonction

L'étude d'une fonction consiste à dessiner la courbe représentant la fonction dans un repère (un principe orthonormé). Cette courbe est composée de l'ensemble des points $(x;y)$ avec $y = f(x)$. Pour ceci on procède en suivant les différentes étapes du plan d'étude d'une fonction :

22.1 plan d'étude d'une fonction

22.1.1 domaine de définition

Le domaine de définition est l'ensemble des valeurs de x qui ont une image par la fonction f donnée. Le domaine de définition de la fonction f est noté D_f.
Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ sauf dans les cas suivants où D_f est composé des valeurs de x vérifiant la condition :

$f(x) = \sqrt{g(x)}$	condition :	$g(x) \geq 0$
$f(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$	condition :	$g(x) \neq 0$
$f(x) = \log_a(g(x))$	condition :	$g(x) > 0$
$f(x) = \dfrac{h(x)}{\sin(g(x))}$	condition :	$g(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \dfrac{h(x)}{\cos(g(x))}$	condition :	$g(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \tan(g(x)) = \dfrac{\sin(g(x))}{\cos(g(x))}$	condition :	$g(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \mathrm{cotan}(g(x)) = \dfrac{\cos(g(x))}{\sin(g(x))}$	condition :	$g(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

22.1.2 périodicité

f est périodique de période T si $f(x+T) = f(x), \forall x \in D_f$.
Dans ce cas il suffit d'étudier la fonction dans l'intervalle $[0;T]$ et reproduire la courbe associée à cet intervalle dans les intervalles $[T;2T],[2T;3T],\ldots$ et $[-T;0],[-2T;T],\ldots$
On essaye d'établir une éventuelle périodicité uniquement avec des fonctions trigonométriques.

22.1.3 parité

Il faut déterminer si la fonction f est paire ou impaire (ou ni l'un ni l'autre).

f est une fonction paire si $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$.
Dans ce cas l'axe des ordonnées (axe des y) est un axe de symétrie de la courbe représentant f. Il suffit donc d'étudier f sur l'intervalle $[0;+\infty]$ et de reproduire la courbe associée à cet intervalle symétriquement sur l'intervalle $[0;-\infty]$.

f est une fonction impaire si $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$.
Dans ce cas le point $(0;0)$ est un centre de symétrie de la courbe représentant f. Il suffit donc d'étudier f sur l'intervalle $[0;+\infty]$ et de reproduire par symétrie centrale la courbe associée à cet intervalle sur l'intervalle $[0;-\infty]$.

22.1.4 étude du signe et zéros d'une fonction

L'étude du signe de la fonction f permet de préciser les régions dans lesquelles la courbe représentant f se trouve.
Les x tels que $f(x) > 0$ correspondent à des points situés au-dessus de l'axe des abscisses.
Les x tels que $f(x) < 0$ correspondent à des points situés au-dessous de l'axe des abscisses.
Les x tels que $f(x) = 0$ correspondent à des points situés sur de l'axe des abscisses. Ces points sont appelés "zéros" de la fonction.

Remarques :
- l'axe des abscisses est l'axe des x.
- l'étude du signe se fait à l'aide d'un tableau d'étude du signe.

22.1.5 asymptotes

Une asymptote à une courbe est une droite telle que la distance entre les points de la droite et ceux de la courbe tend vers 0.
Il faut déterminer si la fonction possède des asymptotes verticales, horizontales ou obliques.

Si $D_f = \mathbb{R}$, la fonction ne possède pas d'asymptote verticale, sinon il faut calculer les limites aux bornes de D_f (autres que $+\infty$ et $-\infty$) et si une limite de ce type tend vers ∞ il y a une asymptote verticale à cet endroit.
L'existence ou non-existence d'asymptotes verticales ne permet pas de déduire s'il existe ou non des asymptotes horizontales ou obliques.

Par contre si une fonction possède une asymptote horizontale à droite (respectivement à gauche), elle ne possède pas d'asymptote oblique à droite (respectivement à gauche) et vice-versa.
(Pour plus d'informations sur les asymptotes, se référer au module 19)

22.1.6 extrema et croissance

L'étude du signe de la dérivée première f' d'une fonction permet de déterminer les extrema de la fonction (maximum, minimum ou point d'inflexion à tangente horizontale, ce sont des points $(x; f(x))$ tels que $f'(x)=0$) et sa croissance (f est croissante si $f'(x)>0$ et f est décroissante si $f'(x)<0$).

22.1.7 points d'inflexion et concavité

L'étude du signe de la dérivée seconde f'' d'une fonction permet de déterminer les points d'inflexion de la fonction (points $(x; f(x))$ tels que $f''(x)=0$) et sa concavité (f est concave ($\cap$) si $f''(x)<0$ et f est convexe ($\cup$) si $f''(x)>0$).

22.1.8 représentation graphique

Les résultats des points précédents et le calcul éventuel de points supplémentaires permettent d'esquisser la courbe représentant la fonction $f(x)$.

Module 23 étude de fonctions polynomiales

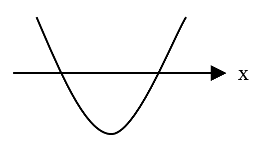
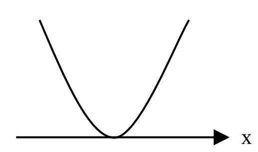
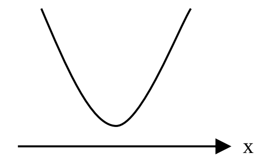
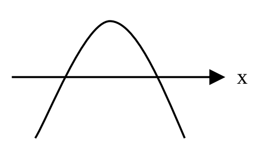
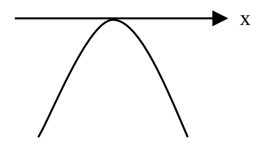
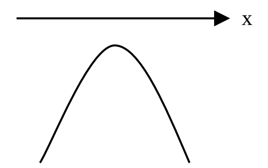
Une **fonction polynomiale du premier degré** est une fonction du type : $f(x) = ax + b$, que l'on note également $y = ax + b$. La courbe représentant cette fonction est une droite. a est la pente de la droite et b est l'ordonnée à l'origine (intersection de la droite avec l'axe des y). Pour tracer cette droite on cherche deux points et on trace la droite. Il n'est pas nécessaire d'étudier la fonction.

Une **fonction polynomiale du deuxième degré** est une fonction du type :
$f(x) = ax^2 + bx + c$. La courbe représentant cette fonction est une parabole. Une étude complète n'est pas nécessaire, car une parabole comporte soit un maximum, soit un minimum, ainsi qu'un axe de symétrie vertical passant par cet extremum.
Les coordonnées de l'extremum sont $\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, la parabole possède 2 points d'intersection avec l'axe des x : $\left(\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right)$

Si $\Delta = 0$, la parabole ne possède qu'un seul point d'intersection avec 0_x : $\left(\frac{-b}{2a}; 0\right)$, ce point est également l'extremum.
Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de points d'intersection entre la parabole et l'axe des x.
Le signe de a indique la concavité de la parabole.

En résumé :

	$\Delta > 0$ (2 intersections avec Ox)	$\Delta = 0$ (1 intersection avec Ox)	$\Delta < 0$ (pas d'intersection avec Ox)
$a > 0$ (courbe convexe)			
$a < 0$ (courbe concave)			

Une **fonction polynomiale de degré supérieur à 2** doit être étudiée. Mais on sait que :

- $D_f = \mathbb{R}$ car il n'y a pas de division et de logarithme, ni de racines
- Il n'y a pas d'asymptote verticale (car $D_f = \mathbb{R}$) et pas d'asymptote horizontale ni oblique

Module 24 Etude de fonctions rationnelles simples (homographiques)

Une fonction homographique est une fonction du type $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, irréductible. L'étude de ce genre de fonction peut être réduite en considérant les résultats suivants :

1) Domaine de définition :

$$cx+d=0 \Rightarrow x=\frac{-d}{c},\ \text{ et on a : } \lim_{x\to\frac{-d}{c}}\frac{ax+b}{cx+d}="\frac{nombre}{0}"=\infty,$$

une fonction homographique possède donc toujours une asymptote verticale en $x=\dfrac{-d}{c}$.

2) Asymptote horizontale :

Le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur (=1), il y a donc une asymptote horizontale. Comme $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{cx}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{c}=\frac{a}{c}$, une fonction homographique possède toujours une asymptote horizontale en $y=\dfrac{a}{c}$.

3) Centre de symétrie :

Un point $(p;q)$ est centre de symétrie d'une fonction f si on a : $q=\dfrac{f(p+x)+f(p-x)}{2}$.

On peut prouver qu'une fonction homographique possède un centre de symétrie en $\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$.

4) Dérivée première :

$$f'(x)=\frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2}=\frac{acx+ad-acx-bc}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

Le numérateur de la dérivée est $ad-bc$, c'est une constante qui a donc toujours le même signe. Le dénominateur $(cx+d)^2$ est toujours positif puisque l'expression est élevée au carré. Le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $ad-bc$:

Si $ad-bc>0$ alors $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ □ , la fonction est toujours croissante.
Si $ad-bc<0$ alors $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ □ , la fonction est toujours décroissante.

5) Dérivée seconde :

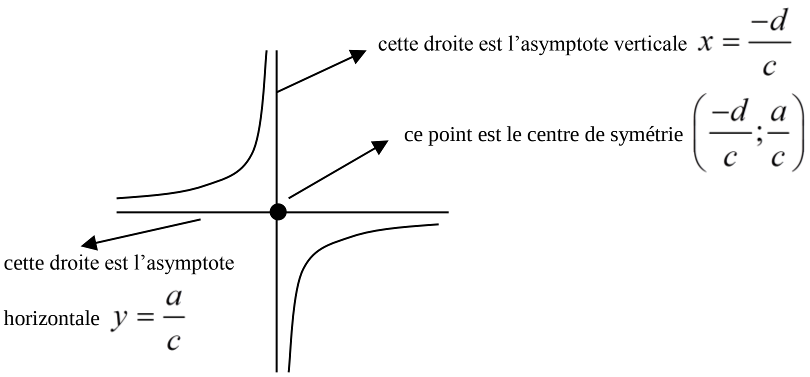
$$f''(x) = \frac{0(cx+d)^2 - (ad-bc)2(cx+d)c}{(cx+d)^4} = \frac{-2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$$

Le numérateur de la dérivée est une constante dont le signe ne change pas. Le dénominateur est une expression élevée au cube. Le signe de $f''(x)$ dépend donc du signe de $cx+d$.

Comme $cx+d$ change de signe en $x = \frac{-d}{c}$, la courbe représentant f sera soit concave avant $x = \frac{-d}{c}$, puis convexe, ou le contraire.

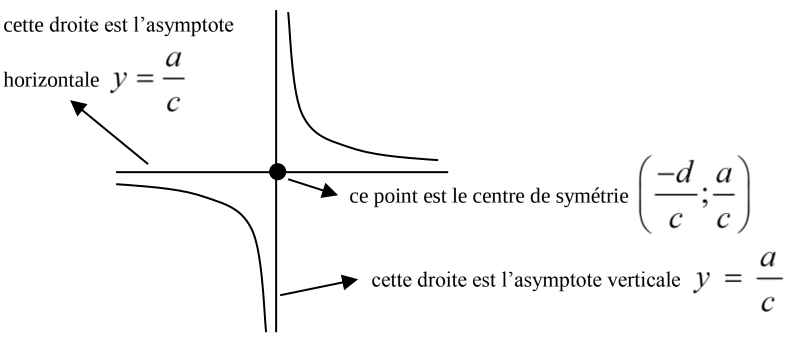
6) Les résultats précédents et un calcul éventuel des coordonnées de quelques points nous permettent de tracer la courbe représentant f. Elle aura l'allure suivante :

Cas 1 : f □ , c'est-à-dire $ad - bc > 0$



Attention : les axes ne sont pas représentés

Cas 2 : f □ , c'est-à-dire $ad - bc < 0$



Attention : les axes ne sont pas représentés

Module 25 Etude de fonctions rationnelles quelconques

Les fonctions rationnelles sont des fonctions dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

Rappel : un polynôme est une fonction du type $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, où $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ sont des nombres réels et n (nombre entier positif) est le degré du polynôme.

L'étude complète est nécessaire.

Soit f une fonction rationnelle telle que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, où
$p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est un polynôme de degré m et
$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n.

On a en particulier :

- Les zéros de $p(x)$ correspondent aux points d'intersection de la fonction avec l'axe O_x (sauf si ces zéros sont aussi des zéros de $q(x)$).
- Les zéros de $q(x)$ correspondent à des asymptotes verticales (sauf si ces zéros sont aussi des zéros de $p(x)$, dans ce cas il peut y avoir une asymptote verticale ou un trou).
- Si $m = n$, la fonction f possède une asymptote horizontale à gauche et à droite en $y = \frac{a_m}{b_n}$.
- Si $m = n+1$, la fonction f possède une asymptote oblique à gauche et à droite en $y = ax + b$, où $ax + b$ est le quotient de la division euclidienne de $p(x)$ (dividende) par $q(x)$ (diviseur).
- Si $m > n+1$, la fonction f ne possède ni d'asymptote horizontale, ni d'asymptote oblique.
- Si $m < n$, la fonction f possède une asymptote horizontale en $y = 0$.

Module 26 Etude de fonctions irrationnelles

Les fonctions irrationnelles sont des fonctions comportant des racines. Une étude complète est nécessaire.

Rappels :

- Les expressions situées sous une racine carrée doivent être positives, il faut donc faire une étude du signe d'une telle expression.

- Lors du calcul des asymptotes horizontales ou obliques il ne faut pas oublier les résultats des limites suivantes :

  $\sqrt{x^2} = x$ si $x > 0$ et

  $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$

- Si $+\infty$ n'est pas une borne du domaine de définition, la courbe représentant f ne possède pas d'asymptote horizontale ou oblique à droite.

- Si $-\infty$ n'est pas une borne du domaine de définition, la courbe représentant f ne possède pas d'asymptote horizontale ou oblique à gauche.

- Pour résoudre une équation possédant une racine carrée, il faut parfois l'isoler puis élever au carré les deux membres obtenus, on parvient ainsi à éliminer la racine carrée. On résout ensuite l'équation obtenue sans oublier de tester les solutions trouvées dans l'équation d'origine, car l'élévation au carré peut éventuellement introduire des solutions parasites.

- $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

- $\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$

Module 10 Trigonométrie (partie 1)

Module 11 Trigonométrie (partie 2)

Module 12 Trigonométrie (partie 3)

Module 13 Trigonométrie (partie 4)

Module 14 Fonctions trigonométriques de base

Exercice 3

Résoudre les équations

a) $\arcsin(3x) = \frac{\pi}{2}$

b) $6\arccos(0.5x) = \pi$

c) $4 = \frac{\pi}{\text{arctang}(x)}$

Module 15 Géométrie vectorielle (partie 1)

Module 16 Géométrie vectorielle (partie 2)

Module 17 Géométrie vectorielle (partie 3)

Module 18 Limites et continuité d'une fonction

Module 19 Asymptotes

Module 20 Dérivée d'une fonction (partie 1)

Exercice 1

Sur la courbe d'équation $y = x^3$, on considère les points P, Q et H d'abscisses respectives $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2} + h$, $h \neq 0$.

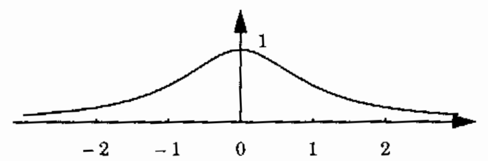
1) Calculer la pente de la sécante (PQ)
2) Calculer, en fonction de h, la pente de la sécante (PH), H étant un point voisin de P
3) Calculer la pente de la tangente à la courbe au point P

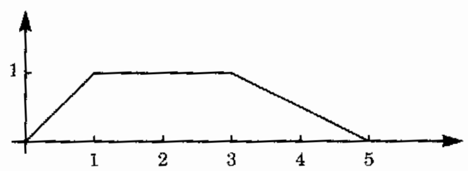
Exercice 2

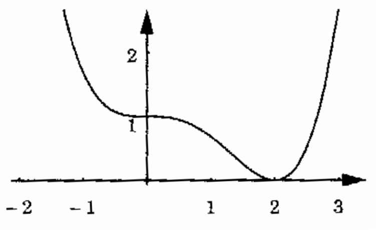
Quelle est l'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $y = x^2$ au point (2 ;4) ?

Exercice 3

On donne le graphe d'une fonction. Esquisser le graphe de sa dérivée

1)


2)


3)


Exercice 4

A partir de la définition calculer le nombre dérivé de la fonction f au point a

1) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ a = 1

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ a > 0

Module 21 Dérivée d'une fonction (partie 2)

dériver les fonctions suivantes

	Série A	Série B
1)	$x+1$	$-x+2$
2)	$2x$	x^3-3x+2
3)	$-3x+5$	3
4)	$ax+b$	$-12x$
5)	x^2	$3x^2$
6)	$4x^2-5x+6$	$4x^2+x-6$
7)	$2x^3+2x+1$	$\frac{1}{3}x^3-x^2+x-3$
8)	ax^2+bx+c	$\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+3x-\frac{3}{4}$
9)	ax^3+bx^2+cx+d	-5
10)	0	x^8-16
11)	x^2-4	x^2+a^2
12)	$\frac{1}{2}x^2-3x+4$	x^3-a^3
13)	$(x+5)(x-3)$	$(4-x)^3$
14)	$(3x^2+5)(x^2-1)$	$(x-1)^2(x+2)$
15)	$(ax+b)(cx+d)$	$(2x-1)^3(x+2)^2$
16)	$\frac{a}{x}$	$\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$
17)	$\frac{x+5}{x-1}$	$\frac{x^3}{x+1}$
18)	$\frac{x^2-x+5}{x^2-2x+1}$	$\frac{2x}{(x-1)^2}$
19)	$\left(x^2+5x-1\right)^5$	$\frac{x^3-4}{x^2}$
20)	$(3x^2-x-1)(2x-3)^3$	$\frac{x^2-2x-3}{2x+3}$
21)	$(2x^2-x-1)^3$	$2x\frac{x-1}{x+1}$
22)	$(x+2)^3x^2$	$\frac{x^3}{(x-1)^2}$
23)	$(2x-1)(7-3x^2)$	$\frac{ax+b}{cx+d}$

24)	$\frac{2x}{x^2+1}$	$\frac{x}{x^2-3x+2}$
25)	$\sqrt{x}$	$x+\sqrt{2x}$
26)	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{x^3-3x+2}$
27)	$\sqrt[3]{x^2}$	$x\sqrt{x^2+1}$
28)	$\sqrt{x^3}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
29)	$\sqrt{x^2+5x-1}$	$\sqrt{3x^2}$
30)	$\sqrt[3]{(x-1)^2}$	$\frac{\sqrt{2x-1}}{x}$
31)	$x^2\sqrt{2x+1}$	$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$
32)	$\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$	$\sqrt{x+\sqrt{x}}$
33)	$(x^2-16)\sqrt{4-x}$	$\sqrt{(2-x)^3(2+x)}$
34)	$\sin x+\cos x$	$\sin(2x)$
35)	$\tan x - x$	$\cos(3x^2)$
36)	$3\sin x$	$4\sin(2x)-2\cos^2 x$
37)	$a\cos x$	$\sin(2x-1)$
38)	$(2x-3)\sin x$	$\cos(ax+b)$
39)	$\sin^2 x$	$(\sin x+\cos x)^2$
40)	$\frac{1}{\tan(2x)}$	$\sin^5(4x)$
41)	$\sqrt{\sin x}$	$\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
42)	$\left(\cos\sqrt{x}\right)^3$	$\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$
43)	e^{2x}	$\ln(3x)$
44)	e^{ax+b}	$\ln(x^2+5)$
45)	$e^{\sin x}$	$\ln(\sin(4x))$
46)	$(ax+b)e^x$	$\ln\sqrt{x}$
47)	$e^x\sin x$	$\ln(\ln x)$
48)	$\cos(2x)e^{4x}$	$\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$
49)	xe^x	$x^2\ln x$
50)	$x\ln x$	$\ln(e^x)$
51)	$e^{\ln x}$	$e^{\cos x}$

52) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$	$e^x(1-x)$
53) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$	$\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
54) $x+\ln x$	$3x^2-\sin x+e^x$
55) $(1+\sqrt{x})^3$	$x(2x-1)(x^2+4)$
56) $(x+a)\sqrt{a-x}$	$\sqrt[3]{3x^2-2x-1}$
57) $\dfrac{x}{\ln x}$	$\dfrac{x^3}{1-x^2}$
58) $\sqrt{x+\tan x}$	$\ln(x+\sqrt{2x})$
59) $\sin(3x)\cos(2x)$	$\dfrac{2x^4}{x^2-a^2}$
60) $x\sin(x)+\cos(x)$	$\sqrt{\cos(3x)}$
61) $(x-1)^3(2x+1)^2$	$(x^2-1)^3$
62) $\dfrac{(2x+1)^2}{x-2}$	$\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$
63) $\dfrac{\cos x}{1-\cos x}$	$\dfrac{\sin x}{x}$
64) $\sin x+\dfrac{1}{2}\sin(2x)$	$e^x\ln x$
65) $\sqrt{-x^2+2x}$	$\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$
66) $2(x-\sin x)$	$\sqrt{x}(1-2x)^3$
67) $\dfrac{\tan(3x)}{x}$	$\dfrac{1}{\cos x}$
68) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$	$\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}$
69) $\dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x^3}}$	$\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$
70) $(x+4)(1-x)^2$	$\sqrt[3]{x^3-x}$
71) $\dfrac{2x-4}{3-x}$	$\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$
72) $\dfrac{3+2x}{\sqrt{1+x}}$	$\tan^2\left(\dfrac{3x}{2}\right)$
73) $\dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}$	$\sqrt{x^2+\sqrt{1+x}}$
74) $\cos x(1-\sin x)$	$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

75) $\sin^2 x \cdot \cos(2x)$ $\qquad$ $\dfrac{\tan(3x)}{1+\tan^2(3x)}$

76) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ $\qquad$ $\arcsin(2x)$

77) $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad$ $\arctan(\sin x)$

78) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Module 22 Etude d'une fonction

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition, le signe et les éventuels zéros des fonctions suivantes. Hachurer également dans un système d’axes, les zones dans lesquelles le graphe représentant les fonctions ne passe pas :

1) $f(x)=\dfrac{8x}{2x+4}$
2) $f(x)=\dfrac{4}{9-x^2}$
3) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$
4) $f(x)=\ln(2x-3)$
5) $f(x)=\ln\left(\dfrac{8-2x^2}{x+3}\right)$
6) $f(x)=\dfrac{2x+7}{x^2+9}$
7) $f(x)=\sqrt{4-3x}$
8) $f(x)=e^{2x^2-1}$

Exercice 2

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+9x}$
2) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^3-1}$
3) $f(x)=\dfrac{2x}{3x^2-9}$
4) $f(x)=\sqrt{2x^2-7}$
5) $f(x)=\left(e^x\right)^2$
6) $f(x)=\dfrac{8-x^2}{3x^4+7x^2}$
7) $f(x)=\dfrac{\ln(2x^2-1)}{x}$
8) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

Module 23 étude de fonctions polynomiales

1. Etudier la fonction $f(x) = -7x^3 + 26x^2 - 13x - 6$

2. Etudier la fonction $f(x) = -x^4 - 3x^2 + 10$

3. Etudier la fonction $f(x) = (-x^2 + 4x - 3)^2 - 1$

4. On considère les fonctions $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 1$ et $g(x) = \dfrac{x^3}{4} - 2x - 1$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) < g(x)$?

5. a) Etudier les variations de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$. Préciser les coordonnées des points extrema.
   b) Déterminer l'équation de la tangente t au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$, ainsi que les coordonnées du deuxième point d'intersection de la droite t avec le graphe de f. Tracer la droite t.
   c) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I et tracer la tangente en I.
   d) Tracer le graphe de la fonction f en utilisant tous les éléments précédents.
   e) Calculer la (ou les) solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ à 0.5 près.

6. Etudier $f(x) = (2 - x)(x^2 + 2x + 1)$. Former les équations des tangentes aux points d'abscisses respectives $-\dfrac{3}{2}$ et 2.

7. Déterminer le nombre a de façon que le graphe de la fonction $f(x) = x^3 - 12x + a$ soit tangent à l'axe Ox.

8. a) Pour quelles valeurs réelles du paramètre t la fonction f_t définie par $f_t(x) = \dfrac{x^3}{t} + \dfrac{2x^2}{t-1} + \dfrac{x}{t-2}$ est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?
   b) Etudier les variations de $f_3(x)$.

Module 24 Etude de fonctions rationnelles simples (homographiques)

Exercice 1

En utilisant le résultat suivante : un point $(p;q)$ est centre de symétrie d'une fonction f si on a : $q=\dfrac{f(p+x)+f(p-x)}{2}$, démontrer que le point $\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ est un centre de symétrie de la fonction homographique $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Exercice 2

Etudier la fonction $f(x)=\dfrac{2x-3}{4-x}$.

Exercice 3

Etudier la fonction $f(x)=\dfrac{6}{x+3}$.

Exercice 4

Déterminer les nombres a et b de manière que la courbe représentative de la fonction $y=\dfrac{ax+b}{x-3}$ passe par le point $A(5;7)$ et admette en ce point une tangente de pente -2. Etudier ensuite cette fonction.

Module 25 Etude de fonctions rationnelles quelconques

1. Etudier la fonction $f(x)=\dfrac{4x^2+4x+5}{4x+2}$

2. Etudier la fonction $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$

3. On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+5}$

   a) Etudier les variations de $f(x)$ lorsque la variable x décrit le domaine de définition. Préciser les coordonnées des extrema et la nature de la branche infinie.

   b) Démontrer que le graphe de f est symétrique par rapport au point S de coordonnées (2;1)

   c) Calculer la dérivée seconde et déterminer les points d'inflexion du graphe. Déterminer l'équation de la tangente au graphe au point S; tracer cette tangente.

   d) Tracer le graphe de la fonction f avec précision.

4. Etudier et représenter graphiquement la fonction numérique f définie par

   $$f(x)=1+\frac{1}{x^2+5}.$$

   Discuter graphiquement l'équation $f(x)=m$.

5. On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{2(x-2)}$, où a et b sont deux constantes que l'on déterminera par la suite.

   a) Préciser le domaine de définition

   b) Calculer la dérivée

   c) Déterminer a et b pour que le graphe de la fonction passe par le point (3;2.5) et pour qu'il y ait extremum pour $x=1$ et $x=3$.

   d) Donner le tableau de variations de la fonction f ainsi déterminée. Donner l'équation de l'asymptote oblique et montrer que le point S(2;1.5) est centre de symétrie du graphe.

   e) Déterminer l'intersection de $f(x)$ avec la droite $y=x-0.5$

6. Soit la fonction $f(x)=-3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

   a) Etudier les variations de f et préciser les droites asymptotes à sa représentation graphique.

   b) Vérifier que $f(x)=\dfrac{(1-x)(1+3x)}{x^2}$. En déduire les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.

   c) Terminer l'étude et tracer la courbe représentant f.

Module 26 Etude de fonctions irrationnelles

1. Etudier les fonctions suivantes :

   a) y = $\sqrt{2x+8}$
   b) y = $\sqrt{10-x}$
   c) y = $\dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

2. a) Etudier la fonction f(x) = $2\sqrt{x^2-4x}$
   b) Etudier la fonction f(x) = $2\sqrt{4x-x^2}$

3. Etudier la fonction f(x) = $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$

4. Etudier la fonction f(x) = $x-2\sqrt{x-3}$

5. Etudier la fonction f(x) = $x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

6. Etudier la fonction f(x) = $x+1+\sqrt{x^2+1}$

7. Etudier g(x) = $x\sqrt{1-x^2}$. Donner l'équation des tangentes à g(x) aux points d'abscisses 0 et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Représentez graphiquement ces tangentes.

   Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$. Que peut-on en déduire pour le point d'abscisse 1 ?