Chapitre 1.2a – La dynamique du mouvement harmonique simple : le ressort

La force d'un ressort idéal


Un ressort de compression.

Dans le cours de physique mécanique[1], nous avons défini vectoriellement que la force appliquée par un ressort idéal[2] $\vec{F}_r$ est proportionnel au produit de la constante de rappel k du ressort avec la déformation e du ressort (étirement ou compression) :

- $\vec{F}_r = -k\vec{e}$ (Définition vectorielle)
- $F_r = ke$ (Définition scalaire)

où $\vec{F}_r$: Force appliquée par le ressort (N).
k : Constante de rappel du ressort (N/m).
$\vec{e}$: Vecteur étirement ou compression du ressort (m).
e : Module de l'étirement ou de la compression du ressort (m).

Schéma des forces pour une compression :

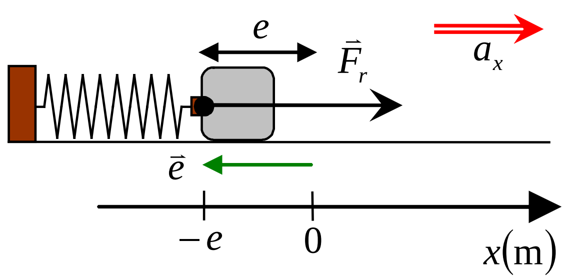
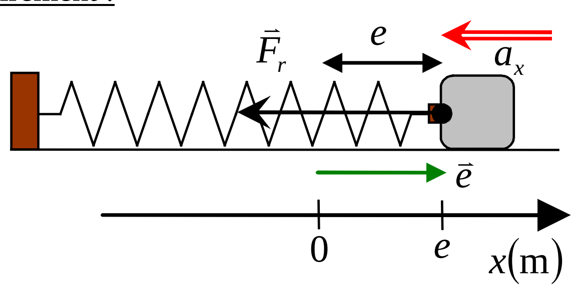
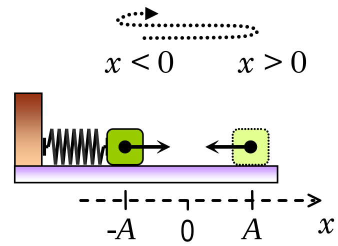


Schéma des forces pour un étirement :



[1] Rappel de mécanique : Physique XXI Volume A, chapitre 2.2
[2] Un ressort idéal applique des forces F_r uniquement proportionnellement à la déformation e du ressort et la masse du ressort est négligeable.

La dynamique d'un système masse-ressort à l'horizontale



L'application de la 2e loi de Newton à un système masse-ressort oscillant à l'horizontale sans frottement génère une équation différentielle égale à l'oscillateur harmonique simple OHS dont la solution est le mouvement harmonique simple MHS. La fréquence naturelle d'oscillation ω_0 associée au système masse-ressort dépend de la racine carrée du rapport entre la constante de rappel *k* du ressort et de la masse *m* de l'objet :

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi) \quad \text{tel que} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

où $x(t)$: Position de la masse selon l'axe *x* ($x = 0$ est à l'équilibre) (m)

A : Amplitude du mouvement (m)

ω_0 : Fréquence angulaire naturelle d'oscillation du système masse-ressort (rad/s)

k : Constante de rappel du ressort (N/m)

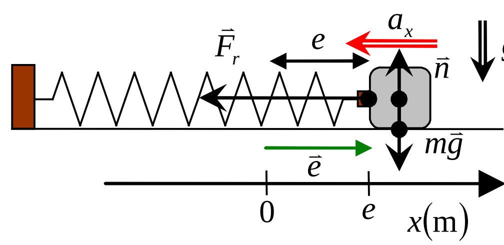
m : Masse de l'objet en oscillation (kg)

t : Temps écoulé durant l'oscillation (s)

ϕ : Constante de phase (rad)

Preuve :

À partir de la 2ième loi de Newton, développons l'équation différentielle associée à un système masse-ressort oscillant à l'horizontale afin de retrouver l'équation de L'OHS et d'utiliser la solution du MHS avec fréquence angulaire ω_0 :



$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_r + m\vec{g} + \vec{n} = m\vec{a}$ (Identifier toutes les forces)

$\Rightarrow \quad \vec{F}_r = m\vec{a}$ ($m\vec{g} + \vec{n} = 0$, car mouvement à l'horizontale)

$\Rightarrow \quad -k\vec{e} = m\vec{a}$ (Remplacer $\vec{F}_r = -k\vec{e}$)

$\Rightarrow \quad -k\vec{x} = m\vec{a}$ (Remplacer $\vec{e} = \vec{x}$, car étirement $\equiv$ position)

$\Rightarrow \quad -kx = ma_x$ (Décomposer selon l'axe *x*)

$\Rightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x$ (Isoler a_x)

$\Rightarrow \quad a_x = -\omega_0{}^2 x$ (Remplacer $\omega_0{}^2 = k/m$, forme de l'OHS)

$\Rightarrow \quad x = A\sin(\omega_0 t + \phi) \quad \blacksquare$ (Solution de l'OHS : MHS)

Situation 3 : *Un pèse-astronaute.* Une navette spatiale en orbite est en chute libre : la gravité *apparente* à l'intérieur de la navette est nulle. Par conséquent, les balances ordinaires sont inopérantes. Pour suivre l'évolution de leur masse pendant la mission, les astronautes s'assoient dans un dispositif qui contient un ressort dont la constante de rappel est connue, se donnent une poussée, se laissent osciller et mesurent la période naturelle d'oscillation. Assise dans un dispositif dont la constante de rappel est de 500 N/m, une astronaute prend 2,31 s pour effectuer une oscillation complète : on désire déterminer sa masse, sachant que le dispositif lui-même a une masse de 10 kg.

Voici les informations que l'énoncé nous apporte :

- $T_0 = 2{,}31\ \text{s}$ (Période naturelle d'oscillation)
- $k = 500\ \text{N/m}$ (Constante de rappel du ressort)
- $m_\text{D} = 10\ \text{kg}$ (Masse du dispositif)

À partir de la période naturelle d'oscillation, évaluons la fréquence angulaire naturelle à partir de la définition fondamentale de celle-ci :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{(2{,}31)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 2{,}720\ \text{rad/s}}$$

À partir de l'expression de la fréquence angulaire naturelle d'oscillation d'un système masse-ressort, évaluons la masse totale *m* en oscillation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad {\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{k}{{\omega_0}^2} \qquad \text{(Isoler } m\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{(500)}{(2{,}720)^2} \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m = 67{,}58\ \text{kg}} \qquad \text{(Évaluer } m\text{)}$$

Évaluons la masse de l'astronaute m_A à partir de la masse totale *m* et la masse du dispositif m_D :

$$m = m_\text{A} + m_\text{D} \quad \Rightarrow \quad (67{,}58) = m_\text{A} + (10)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m_\text{A} = 57{,}58\ \text{kg}}$$

Situation A : ***Lâcher ou lancer ?*** Un système bloc-ressort composé d'un bloc de 3 kg et d'un ressort de 12 N/m repose à l'horizontale. Déterminez **(a)** l'équation du mouvement du bloc si l'on lance le bloc depuis la position d'équilibre avec une vitesse de 0,6 m/s dans le sens négatif de l'axe des *x* et **(b)** l'équation du mouvement du bloc si l'on lâche le bloc à une distance 8 dm de la position d'équilibre du côté positif de l'axe des *x*.

Déterminons la fréquence angulaire des oscillations du bloc :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{(12)}{(3)}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = 2 \text{ rad/s}}$$

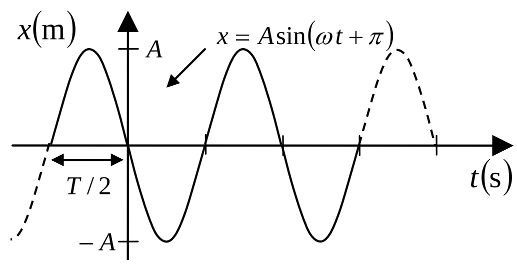
Pour déterminer l'équation du mouvement en **(a)**, nous devons évaluer l'amplitude des oscillations en utilisant le fait qu'à $t = 0$, le bloc aura atteint sa vitesse maximale, car il passera par la position d'équilibre :

$$v_{x\max} = A\omega \quad \Rightarrow \quad (0,6) = A(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0,3 \text{ m}}$$

Puisque le bloc est lancé dans le sens négatif de l'axe x à $t = 0$, ce mouvement correspond à la constante de phase

$$\phi = \pi \quad .$$

(**rappel** : $\phi = \pi \leftrightarrow \Delta t = T/2$)



Ainsi, nous obtenons en **(a)** l'équation suivante :

$$x = 0,3\sin(2t + \pi)$$

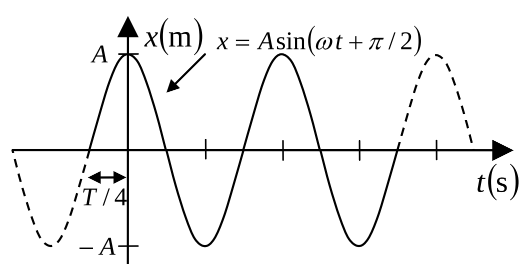
Pour déterminer le mouvement en (b), nous devons évaluer l'amplitude des oscillations en utilisant le fait qu'à $t = 0$, le bloc sera immobile et aura atteint la plus grande distance par rapport à la position d'équilibre ce qui correspond exactement à la valeur de l'amplitude :

$$A = 0,8 \text{ m}$$

Puisque le bloc est immobile à la position positive $x = 0,8$ m à $t = 0$, ce mouvement correspond à la constante de phase

$$\phi = \frac{\pi}{2} \quad .$$

(**rappel** : $\phi = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$)



Ainsi, nous obtenons en **(b)** l'équation suivante :

$$x = 0,8\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$$